கணிதவியல்

மேல் நிலை – இரண்டாம் ஆண்டு

தொகுதி – I

பாடநூல் மேம்பாட்டுக் குழுவின் பரிந்துரையின் அடிப்படையில் திருத்தப்பட்டது.

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்
தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்
தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச்சாலை, சென்னை–600 006

முதற் பதிப்பு–2005
திருத்திய பதிப்பு–2007

நூலாசிரியர் மற்றும் குழுத்தலைவர்

முனைவர் **K. ஸ்ரீனிவாசன்**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005

நூலாசிரியர்கள்

முனைவர் **E. சந்திரசேகரன்**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை – 600 005

முனைவர் **ஃபெல்பின் C. கென்னடி**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
ஸ்டெல்லா மாரீஸ் கல்லூரி, சென்னை–600 006

திரு **R. சுவாமிநாதன்**
முதல்வர், அழகப்பா மெட்ரிகுலேஷன்
மேனிலைப் பள்ளி, காரைக்குடி – 630 003

திரு. **A.V. பாபு கிறிஸ்டோபர்**
முதுகலை கணிதப்பாட ஆசிரியர்
புனித சூசையப்பர் மேல்நிலைப் பள்ளி
செங்கல்பட்டு – 603 002

திரு **S. பன்னீர்செல்வம்**
முதுகலை கணிதப்பாட ஆசிரியர்
அரசு மேல்நிலைப்பள்ளி, அரும்பாக்கம்,
சென்னை–600 106.

முனைவர் **C. செல்வராஜ்**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
உ.நா. அரசுக் கல்லூரி, பொன்னேரி – 601 204

முனைவர் **தாமஸ் ரோஸி**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
சென்னை கிருத்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை–600 059.

திருமதி **R. ஜானகி**
முதுகலை கணிதப் பாட ஆசிரியை
இராணி மெய்யம்மை பெண்கள்
மேல்நிலைப் பள்ளி, இராசா அண்ணாமலைபுரம்,
சென்னை–600 028.

திருமதி **K.G. புஷ்பவல்லி**
முதுகலை கணிதப்பாட ஆசிரியை
சீமாட்டி சிவஸ்வாமி அய்யர் பெண்கள்
மேல்நிலைப்பள்ளி, மயிலாப்பூர்,
சென்னை–600 004.

நூலாசிரியர் மற்றும் மேலாய்வாளர்

முனைவர் **A. ரகீம் பாட்சா**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் **M. சந்திரசேகர்**
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
அண்ணா பல்கலைக்கழகம், சென்னை – 600 025

முனைவர் (திருமதி) **N. செல்வி**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
A.D.M. பெண்கள் கல்லூரி, நாகப்பட்டிணம்

திரு. **K. தங்கவேலு**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
பச்சையப்பன் கல்லூரி, சென்னை–600 030

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு : தமிழ்நாடு அரசுக்காக
பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு.

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

நூல்முகம்

தமிழக அரசின் 2003-ம் ஆண்டுக்குரிய வழிகாட்டுதல்கள் மற்றும் பாடத்திட்டத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு கணிதவியல் மாணவர்களுக்காக இப்பாடநூல் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழில்நுட்பத்தை மையமாகக் கொண்டு இயங்கும் உலகமயமாதலின் சகாப்தமாகிய 21-ம் நூற்றாண்டில், அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப முக்கியத்துவம் வாய்ந்த கணிதவியலில் பாடநூல் வரைவது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும்.

உலக நாடுகளில் நிலவிவரும் தரத்திற்கு இணையாக இந்நூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. இந்த இலட்சியத்தை அடைவதற்காக ஆசிரியர் குழு புகழ்பெற்று சிறந்து விளங்கும் கல்வி நிறுவனங்களில் பின்பற்றப்படும் பாடநூல்களை விரிவாக ஆய்வு செய்து இந்நூலை எழுதியுள்ளது. இம்முயற்சியானது நாட்டின் இதர பகுதிகளிலுள்ள மற்ற மேல்நிலை மாணவர்களும் பயனடையும் வகையில் இருக்கும் என இக்குழு நம்புகிறது.

மாணவர்கள் எளிமையான அணுகுமுறையை கையாளும் விதமாக இந்நூல் இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. முதற்பகுதியில் அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடு, வெக்டர் இயற்கணிதம், கலப்பெண்கள் மற்றும் பகுமுறை வடிவக் கணிதம் ஆகியவை புதிய அணுகுமுறைகளோடு விளக்கப்பட்டுள்ளது. நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்களின் தீர்வுகள், ஒரு தள அமையாக் கோடுகள் ஆகியவை புதிய முயற்சிகளாய் இடம்பெறுகின்றன.

வகை நுண்கணிதப் பயன்பாடுகள், தொகை நுண்கணிதப் பயன்பாடுகள், வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள், தனிநிலை கணக்கியல் மற்றும் நிகழ்தகவு பரவல்கள் ஆகியவை இரண்டாம் பகுதியில் இடம்பெறுகின்றன. தனி நிலை கணக்கியல் புது அறிமுகத்துடனும் இதர பகுதிகள் புது மாற்றங்களுடனும் இடம்பெறுகின்றன.

இங்கு விளக்கப்பட்டுள்ள பாடப் பகுதிகள் தெளிவான புரிதலை உணர்த்துவதோடு மட்டுமன்றி, கற்பிப்பவர்களுக்கு மேலாய்வுக்குரிய அணுகுமுறைகளையும் கற்பவர்களுக்கு அடிப்படை தத்துவங்களை தாங்களாகவே கண்டுபிடித்து புரிந்து கொண்டு செயல்படவும் அழுத்தம் திருத்தமாகத் தரப்பட்டுள்ளன.

அறிவியல், தொழில்நுட்ப பயன்பாடுகளானவை பாடக் கருத்துகளுடன் பின்னி பிணைக்கப்பட்டு, அவற்றின் வளர்ச்சியில் முக்கிய பங்கை வகிக்கின்றன. நடைமுறை கணக்குகள், உந்துதலுக்கு ஊக்குவிப்பானாகவும் தொடர் ஆர்வத்தை ஏற்படுத்துவனவாகவும், அடிப்படைக் கருத்துகள் மற்றும் கருத்தியல் வழிமுறைகளின் மேம்பாட்டிற்கு அடிப்படையாகவும் அமைகின்றன.

பாடப்பகுதிகளிலுள்ள ஒவ்வொரு உட்பிரிவிலும் தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிகள் மற்றும் விளக்கப்பட்டுள்ள கோட்பாட்டு வழிமுறைகளுக்குமிடையே ஒரு பாலமாக அமைகின்றன. இந்த பயிற்சிகளுக்கு தீர்வுகளை கண்டு, தரப்பட்டுள்ள பயிற்சி - விடைகளைச் சரிபார்ப்பதன் மூலம் மாணவர்கள் தங்களின் புரிந்து கொள்ளும் தன்மையைப் பரிசோதிக்க முடியும்.

தற்போதைய கற்பித்தல் மற்றும் கற்றலின் தேவைகளுக்கு ஏற்ப ஒவ்வொருப் பகுதியிலும் எடுத்துக்காட்டுகள் மற்றும் பயிற்சிகள் தரப்பட்டுள்ளன. ஆய்வுத் திறன், விமர்சன சிந்தனை, தன்மயமாதல், வடிவ கணித ரீதியாக மனக்கண்முன் கொண்டுவருதல் ஆகியவற்றை ஊக்குவிப்பவனவாக அமையும்.

ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிகள் வெவ்வேறு கருத்துகளைத் தருவதோடு மட்டுமன்றி விளக்கப்பட்டுள்ள கோட்பாடுகளை பலப்படுத்தும் கருவியாகவும் அமைகின்றன. மேலும் இவை படைப்பு மற்றும் ஆய்வுக்குரிய சிந்தனைகளை ஊக்கப்படுத்தி எச்சூழலையும் திட நம்பிக்கையுடனும் தைரியத்துடனும் சந்திக்க முடியும் என்பதை ஆசிரியர் குழு உறுதியாக நம்புகிறது. இவ்விதத்தில் ***பயிற்சிகளை ஆசிரியர்களின் உதவியை நாடாமல் மாணவர்கள் தாங்களாகவே தீர்க்க வேண்டும் என்பதே ஆசிரியர் குழுவின் எதிர்பார்ப்பாகும். மாணவர்களின் இம்முயற்சியானது அவர்களுடைய சிந்தனை திறனை வளர்த்து உயர்ந்த இடத்தை அடைய உதவும் கருவியாகவும் அமையும்.*** *இதனை உறுதிப்படுத்துவதில் பெற்றோர்கள், மாணவர்கள் மற்றும் கணித நலம் நாடுவோர் யாவரும் உறுதுணையாக இருப்பார்கள் என்பதில் ஆசிரியர் குழு திடநம்பிக்கை கொண்டுள்ளது.*

ஆசிரியர் – மாணவர் சமுதாயம் மற்றும் பொதுமக்களிடமிருந்து இப்புத்தகத்தை மேலும் மேன்மையடையச் செய்வதற்கான ஆக்கப்பூர்வ ஆலோசனைகள் மற்றும் விமர்சனங்களை ஆசிரியர் குழு பெரிதும் வரவேற்கிறது.

K. *ஸ்ரீனிவாசன்*
தலைவர்
நூலாசிரியர் குழு

பாடத்திட்டம்

(1) ***அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள் : சேர்ப்பு அணி, நேர்மாறு*** – *பண்புகள், நேர்மாறு அணி காணல், நேர்மாறு அணிகாணல் முறையில் நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வு காணல்,* ***அணியின் தரம்*** – *ஒரு அணியின் மீதான சாதாரண உரு மாற்றங்கள், நேரிய* ***சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குரிய ஒருங்கமைவுத்தன்மை, கிரேமர் விதி,*** *சமச்சீரற்ற சமன்பாடுகள், சமபடித்தான நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு, தரமுறை,* **(20 periods)**

(2) ***வெக்டர் இயற்கணிதம் : திசையிலிப் பெருக்கம்*** – *இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், திசையிலிப் பெருக்கத்தின் பண்புகள், பயன்பாடுகள்,* ***வெக்டர் பெருக்கம்*** – *வலக்கை மற்றும் இடக்கை அமைப்பு, வெக்டர் பெருக்கத்தின் பண்புகள், பயன்பாடுகள்,* ***மூன்று வெக்டர்களின் பெருக்கம்*** – *திசையிலி முப்பெருக்கம், திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் பண்புகள், வெக்டர் முப்பெருக்கம், நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம், நான்கு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம்,* ***கோடுகள்*** – *ஒரு புள்ளி மற்றும் இரு வெக்டருக்கு இணையாக, இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் (வரையறை தேவையில்லை) இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்.* ***ஒரே தளத்தில் அமையாக் கோடுகள்*** – *இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம், இரு கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ள நிபந்தனை, வெட்டும் புள்ளி, மூன்று புள்ளிகளின் ஒரே கோட்டமைத் தன்மை,* ***தளங்கள்*** *(வரையறைகள் தேவையில்லை) - ஒரு புள்ளி மற்றும் ஒரு வெக்டருக்குச் செங்குத்தாக – ஆதியிலிருந்து தளத்தின் தொலைவு மற்றும் அலகுச் செங்கோடு வெக்டர் – ஒரு புள்ளி வழியாகவும் இரு வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் – இரு புள்ளிகள் வழியாகவும் ஒரு வெக்டருக்கு இணையாகவும் – ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் – இரு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழிச் செல்லும் – தளங்களின் சமன்பாடு காணல். ஒரு தளத்திற்கும் ஒரு புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம், இரு நேர்க்கோடுகளை உள்ளடக்கிய தளத்தின் சமன்பாடு, இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், ஒரு கோட்டிற்கும் ஒரு தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம்.* ***கோளம்*** *(வரையறைகள் தேவையில்லை) – மையப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர் மற்றும் ஆரம் விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் மூலம் கோளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் காணல்.* **(28 periods)**

(3) ***கலப்பெண்கள் : கலப்பெண் தொகுப்பு, இணைக் கலப்பெண்*** – *பண்புகள்,* ***வரிசையிட்டச் சோடிகளாக எழுதுதல்*** – ***கலப்பெண்ணின் மட்டு*** – *பண்புகள்,* ***வடிவக்கணித உருவமைப்பு*** – *விளக்கம், துருவ வடிவம், முதன்மை மதிப்பு, இணை எண், கூட்டல், வித்தியாசம், பெருக்கல், வகுத்தல், கலப்பெண்களின் வெக்டர் விளக்கம், பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள், டி-மாய்வரின் தேற்றமும் அதன் பயன்பாடுகளும்,* ***கலப்பெண்ணின் மூலங்கள்*** – *n-ஆம் படி, முப்படி, நான்காம் படி மூலங்கள்.* **(20 periods)**

(4) ***பகுமுறை வடிவக்கணிதம் : கூம்பு வளைவுகள்-வரையறை*** – *கூம்பு வளைவின் பொதுச் சமன்பாடு, பொதுச் சமன்பாட்டினைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துதல், மையத் தொலைத் தகவைப் பொறுத்து கூம்பு*

வளைவினை வகைப்படுத்துதல், ***பரவளையம்*** *(வரைமுறை, போக்கு தேவையில்லை) – திட்டச் சமன்பாடு, பரவளையத்தை வரைதல், பிற திட்ட வடிவங்கள், ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல் முறை, பரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம், சில நடைமுறைக் கணக்குகள்.* ***நீள்வட்டம்*** *(வரைமுறை, போக்கு தேவையில்லை) – திட்டவடிவச் சமன்பாடு, நீள்வட்டம் வரைதல், நீள்வட்டத்தின் மற்றொரு வடிவம், நீள்வட்டத்தின் திட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம், சில நடைமுறைக் கணக்குகள்,* ***அதிபரவளையம்*** *(வரைமுறை, போக்கு தேவையில்லை)– திட்டச் சமன்பாடு, அதிபரவளையம் வரைதல், அதிபரவளையத்தின் மற்றொரு வடிவம், கூம்பு வளைவுகளின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள்,* ***நாண்கள், தொடுகோடுகள் மற்றும் செங்கோடுகள்*** *– கார்டீசியன் அமைப்பு, துணையலகு அமைப்பு,* ***தொலைத் தொடுகோடுகள், செவ்வக அதிபரவளையம்*** *(வரைமுறை, போக்கு தேவையில்லை) – திட்டச் சமன்பாடு.* **(30 periods)**

(5) ***வகை நுண்கணிதம் – பயன்பாடுகள் I : வகைக்கெழு – மாறும் அளவை – மாறு வீதம் – தொடர்பு மாறிகளின் மாறு வீதம், வகைக்கெழு – சாய்வின் அளவை*** *– தொடுகோடு, செங்கோடு மேலும் வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்,* ***இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள்*** *– ரோல் தேற்றம்,* ***லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றம்*** *– டெய்லர் விரிவு, மெக்லாரின் விரிவு, லோபிதாள் விதி, தேக்க நிலைப்புள்ளி, பெருகும் சார்பு, குறையும் சார்பு, பெருமங்கள், சிறுமங்கள், குழிவு, குவிவு, வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள்.* **(28 periods)**

(6) ***வகை நுண்கணிதம் – பயன்பாடுகள் II : பிழைகளும் தோராய மதிப்புகளும்*** *–தனிப்பிழை, சார்பிழை, விழுக்காட்டுப்பிழை,* ***வளைவரை வரைதல், பகுதி வகையிடல்*** *– யூலரின் தேற்றம்* **(10 periods)**

(7) ***தொகை நுண்கணிதம் – பயன்பாடுகள்*** **:** *வகையறுத்தத் தொகையின் பண்புகள்,* $\sin^n x$ *மேலும்* $\cos^n x$*ன் சுருக்க வாய்பாடு (முடிவுகள் மட்டும்),* ***பரப்பு, நீளம், கன அளவு,*** *மேலும்* ***புறப்பரப்பு.*** **(22 periods)**

(8) ***வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் : வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைத்தல், வரிசை, படி முதல் வரிசை வகைக் கெழு சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்*** *– பிரிக்கக்கூடிய மாறிகள், சமபடித்தான, நேரிய சமன்பாடுகள்,* ***இரண்டாம் வரிசை முதற்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்*** *(மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட) –* $f(x) = e^{mx}$, $\sin mx$, $\cos mx$, x, x^2 **(18 periods)**

(9) ***தனிநிலைக் கணக்கியல் : (9A) தர்க்கக் கணிதம்*** *– தர்க்கமுறை கூற்று, இணைப்பிகள், மெய் அட்டவணை, மெய்மை.*

(9B) ***குலங்கள் : ஈருறுப்புச் செயலி – அரைக்குலம், சமனியுடைய அரைக்கலம்*** *– குலங்கள், குலத்தின் வரிசை, ஒரு உறுப்பின் வரிசை (எளிய பண்புகள், கணக்குகள் மட்டும்)* **(18 periods)**

(10) ***நிகழ்தகவுப் பரவல் :*** *சமவாய்ப்பு மாறி, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, பரவல் சார்பு, கணித எதிர்பார்ப்பு, விலக்க வர்க்க சராசரி, தனிநிலைப் பரவல் : ஈருறுப்பு பரவல், பாய்ஸான் பரவல், தொடர் பரவல்: இயல்நிலைப் பரவல்.*

(16 periods)

மொத்தம் **210 periods**

பொருளடக்கம்

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

(APPLICATIONS OF MATRICES AND DETERMINANTS)

1.1 அறிமுகம் :

அணிகளைப் பற்றிய அடிப்படை வரையறைகள், சாதாரண செய்முறைகள், பண்புகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி மாணவர்கள் முன்னரே அறிந்துள்ளனர். அணிகளுக்கு இடையே வகுத்தல் வரையறுக்கப்படுவதில்லை. வகுத்தலுக்குப் பதிலாக அதற்கு ஈடான அணியின் நேர்மாறு என்ற கொள்கை அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இதனைப் பற்றி இங்கு விரிவாகக் காண்போம். ஒரு அணியின் நேர்மாறு அணியை வரையறுக்க வசதியாக சேர்ப்பு அணி என்பதனை முதலில் வரையறுப்போம்.

1.2 சேர்ப்பு அணி (Adjoint) :

$A = [a_{ij}]$ என்பது ஒரு n-ஆம் வரிசை சதுர அணி என்க. A_{ij} என்பது a_{ij}-இன் இணைக்காரணி என்க, அவ்வாறாயின் $[A_{ij}]^{\mathrm{T}}$-ஆனது A-இன் சேர்ப்பு அணி எனப்படும். எனவே, A-இன் இணைக்காரணி அணி $[A_{ij}]$-இன் நிரைநிரல் மாற்று அணியைத்தான் A-இன் சேர்ப்பு அணி என்கிறோம்.

கொள்கை : A என்பது ஒரு n–ஆம் வரிசை சதுர அணி எனில், $A\,(\text{adj}A) = |\,A\,|\,I_n = (\text{adj}\,A)\,A$ ஆகும், இங்கு I_n என்பது n-ஆம் வரிசை அலகு அணியாகும்.

நிரூபணம் : நாம் இக்கொள்கையை ஒரு 3-ஆம் வரிசை சதுர அணி A-க்கு நிரூபிப்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$$\left.\begin{matrix} A\,(\text{adj}\,A)\text{-இன்} \\ (i, j)\text{-வது உறுப்பு} \end{matrix}\right\} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \Delta = |\,A\,|\,;\; i = j \text{ எனில்}$$

$$= 0\;;\quad i \neq j \text{ எனில்}$$

$$\therefore A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I_3$$

இவ்வாறே நாம் $(\text{adj } A)A = |A|\, I_3$ என நிறுவலாம்.

$\therefore A\,(\text{adj } A) = |A|\, \mathrm{I}_3 = (\text{adj } A)\, A$

பொதுவாக, நாம் $A\,(\text{adj } A) = |A|\, \mathrm{I}_n = (\text{adj } A)\, A$ என நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1 : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

தீர்ப்பு :

a-இன் இணைக்காரணி = d, b-இன் இணைக்காரணி = $-c$, c-இன் இணைக்காரணி = $-b$ மற்றும் d-இன் இணைக்காரணி = a. இவ்விணைக் காரணிகளை வரிசைக்கிரமமாக எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் அமையும் அணி A-இன் இணைக்காரணி அணியாகும்.

$$\therefore A\text{-இன் இணைக்காரணி அணி} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

இந்த இணைக்காரணி அணியின் நிரைகளையும் நிரல்களையும் இடமாற்றம் செய்திட, A-இன் சேர்ப்பு அணி கிடைக்கும்.

$$\therefore A\text{-இன் சேர்ப்பு அணி} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.2 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$-இன் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு :

$$1\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$1\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$1\text{இன் இணைக்காரணி} = A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$1\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$2\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$-3\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$2\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

$$-1\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$3\text{-இன் இணைக்காரணி} = A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A\text{-இன் இணைக்காரணி} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ adj\ \text{A} = (A_{ij})^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.3 : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ *எனில்,* $A\ (\text{adj}\ A) = (\text{adj}\ A)\ A = |\ A\ |\ I_2$ *என்பதனைச் சரிபார்.*

தீர்வு : $\text{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ |\ A\ | = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2$

$$\text{adj}\ A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A\ (\text{adj}\ A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I_2 \qquad \ldots (1)$$

$$(\text{adj}\ A)\ A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I_2 \qquad \ldots (2)$$

(1) *மற்றும்* (2)-*இலிருந்து* $\therefore\ A\ (\text{adj}\ A) = (\text{adj}\ A)\ A = |\ A\ |\ I_2.$

எடுத்துக்காட்டு 1.4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *எனில்,* $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = |A|\,I_3$ *என சரிபார்க்க.*

***தீர்வு* :** *எடுத்துக்காட்டு* 1.2-*இல், நாம்* $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *கண்டுள்ளோம்.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(6-3) - 1\,(3+6) + 1(-1-4) = -11$$

$$A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= -11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -11\,I_3 = |A|\,\mathrm{I}_3 \qquad \ldots(1)$$

$$(\text{adj } A)\,A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= -11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -11\,I_3 = |A|\,\mathrm{I}_3 \qquad \ldots(2)$$

(1) *மற்றும்* (2)-*இலிருந்து நாம் பெறுவது*

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = |A|\,\mathrm{I}_3$$

1.3 நேர்மாறு (Inverse) :

A என்பது ஒரு n-ஆம் வரிசை சதுர அணி என்க, $AB = BA = I_n$ *எனுமாறு ஒரு அணி B-ஐ காண முடிந்தால் Bஆனது A-இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். இந்நிலையில் A-ஆனது நேர்மாறு காணத்தக்கது எனப்படும். ஒரு அணி A-க்கு நேர்மாறு அணி இருப்பின், அது ஒருமைத் தன்மை* (unique) *வாய்ந்ததாகும். அதாவது ஒரு அணிக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறு அணி இருக்க முடியாது. இதனைக் காண A-இன் இரு நேர்மாறு அணிகள் B மற்றும் C எனக் கொள்வோமாயின்,*

$$AB = BA = I_n \qquad \ldots (1)$$
$$AC = CA = I_n \qquad \ldots (2)$$

இப்பொழுது $AB = I_n$

$\Rightarrow \quad C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \quad$ ($\because$சேர்ப்பு பண்பின்படி)

$\Rightarrow \quad I_nB = C \Rightarrow B = C$

எனவே, நேர்மாறு அணியானது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும். அடுத்து, நாம் நேர்மாறு அணி காண்பதற்கான வாய்பாட்டைக் காண்போம்.

ஏற்கனவே, நாம் A-ஒரு n-ஆம் வரிசை சதுர அணியாயின்,

$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_n$ எனப் பார்த்தோம்.

A-என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி (non-singular matrix) எனக் கொள்வோமாயின், $|A| \neq 0$.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை $|A|$-ஆல் வகுக்க,

$A\left\{\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)\right\} = \left\{\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)\right\}A = I_n$ என அடைகிறோம்.

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து A-இன் நேர்மாறு அணியானது $\frac{1}{|A|}$ (adj A) என்பதை அறிகிறோம். இதனை A^{-1}என குறிக்கின்றோம். சேர்ப்பு அணியின் வாயிலாக ஒரு அணியின் நேர்மாறைக் காண்பதற்கான வாய்பாடு பின்வருமாறு:

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணியாயின் A-க்குரிய நேர்மாறு அணி காண இயலும், அது $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (adj A) என்பதாகும்.

1.3.1 பண்புகள் (Properties) :

1. *நேர்மாறுகளுக்குரிய வரிசைமாற்று விதி* (Reversal Law for Inverses) :

A மற்றும் B ஆகியவை ஒரே வரிசை கொண்ட ஏதேனும் இரு பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் என்க. அவ்வாறாயின் AB-யும் ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும். மேலும்,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

அதாவது, பெருக்கலின் நேர்மாறு அணியானது நேர்மாறு அணிகளின் வரிசை மாற்றுப் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும்.

நிரூபணம் **:** A மற்றும் B பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் என்க. $|A| \neq 0$ மற்றும் $|B| \neq 0$ ஆகும்.

$|AB| = |A| \; |B|$ என நமக்குத் தெரியும்.

$|A| \neq 0, \;\; |B| \neq 0 \;\; \Rightarrow \; |A| \; |B| \; \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; |AB| \neq 0$

எனவே, AB-யும் ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும்.

$\therefore$ AB நேர்மாறு காணத்தக்கது.

$$(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AIA^{-1} = AA^{-1} = \text{I}$$

இவ்வாறே $(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = I$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore (AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})\,(AB) = I$$

AB-இன் நேர்மாறு $B^{-1}\,A^{-1}$ ஆகும்.

$$\text{i.e., } (AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

2. நிரைநிரல் மாற்றுக்குரிய வரிசைமாற்றுப் பண்பு [நிரூபணமின்றி]

[Reversal Law for Transposes (without proof)] :

A மற்றும் B என்ற அணிகள் பெருக்கலுக்கு உகந்தவையாயின், $(AB)^T = B^TA^T$ ஆகும். அதாவது, பெருக்கலின் நிரை நிரல் மாற்றானது நிரை நிரல் மாற்றல்களின் வரிசை மாற்றுப் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும்.

3. A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாயின் $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ஆகும்.

நிரூபணம் : $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$AA^{-1} = I$-இன் இருபுறமும் நிரை நிரல் மாற்று காண, $(AA^{-1})^T = I^T$

நிரை நிரல் மாற்றுக்குரிய வரிசை மாற்றுப் பண்புப்படி,

$$(A^{-1})^T A^T = I \qquad \dots (1)$$

இதே போல் $A^{-1}A = I$-இன் இருபுறமும் நிரை நிரல் மாற்று காண,

$$A^T(A^{-1})^T = I \qquad \dots (2)$$

(1) மற்றும் (2)–இலிருந்து

$$(A^{-1})^T A^T = A^T\,(A^{-1})^T = I$$

எனவே, $(A^{-1})^T$ ஆனது A^T-இன் நேர்மாறாகும்.

அதாவது $\quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

1.3.2 நேர்மாறு அணி காணல் (Computation of Inverses) :

தரப்பட்ட அணிக்கு நேர்மாறு அணி காண்பதற்குரிய முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.5 : பின்வரும் அணிகளின் நேர்மாறு அணிகளைக் காண்க.

$$\text{(i)}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{(iv)}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

தீர்வு :

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ எனில், $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி. எனவே, நேர்மாறு காணத்தக்கது. இணைக்காரணிகளின் அணியானது

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ என்க. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A ஆனது பூச்சியக்கோவை அணியாகும் (singular matrix). எனவே A^{-1} காண முடியாது.

(iii) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ என்க. $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

$\therefore$ இது பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும் எனவே, A^{-1} காணத் தக்கதாகும்.

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ (Adj } A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(iv) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ என்க. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

A பூச்சியமற்ற கோவை அணி. எனவே A^{-1} காண முடியும்.

3-இன் இணைக் காரணி $= A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$

1இன் இணைக் காரணி $= A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$

-1இன் இணைக் காரணி $= A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$

2-இன் இணைக் காரணி $= A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

-2இன் இணைக் காரணி $= A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

0-இன் இணைக் காரணி $= A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

1இன் இணைக் காரணி $= A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

2இன் இணைக் காரணி $= A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

-1-இன் இணைக் காரணி $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}; \text{ adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ (adj } A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.6 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *மற்றும்* $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *எனில்,*

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ *என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.*

தீர்வு : $|A| = -1 \neq 0$ *மற்றும்* $|B| = 1 \neq 0$

எனவே A மற்றும் B நேர்மாறு காணத்தக்கவை ஆகும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

எனவே AB-யும் நேர்மாறு காணத்தக்கது.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{B}^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{adj } B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} (\text{adj } AB) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$B^{-1} A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) *மற்றும்* (2)-*இலிருந்து நாம் பெறுவது* $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

பயிற்சி 1.1

(1) பின்வரும் அணிகளுக்கு சேர்ப்பு அணிகளைக் காண்க :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பைக் கண்டு,

$A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |\,A\,|\,.\,I$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

(3) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பைக் கண்டு

$A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |\,A\,|\,.\,I$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

(4) பின்வரும் அணிகளின் நேர்மாறுகளைக் காண்க :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில்,

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ii) $(AB)^T = B^TA^T$ சரிபார்.

(6) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ –இன் நேர்மாறு காண் மற்றும் $A^3 = A^{-1}$ ஐச் சரிபார்.

(7) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ –இன் சேர்ப்பு அணி $3A^T$ என நிறுவுக.

(8) $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ –இன் சேர்ப்பு அணி A என நிறுவுக.

(9) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $A^{-1} = A^T$ என நிறுவுக.

(10) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$-க்கு, $A = A^{-1}$ எனக் காட்டுக.

1.3.3 நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பின் தீர்வு காணல் (Solution of a system of linear equations by Matrix Inversion method) :

$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ என்பவை மதிப்பிடவேண்டிய n மாறிகள் என்க. இம்மாறிகளில் அமைந்த அசமபடித்தான n நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}\,x_n = b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ an_1 & an_2 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

இவ்வாறாக $AX = B \ldots (1)$ என்கிற அணி சமன்பாட்டை அடைகிறோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

கெழுக்களின் அணி A-ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணியாயின் A^{-1}–ஐக் காணலாம். (1)-இன் முன்புறமாக A^{-1}–ஆல் பெருக்க,

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$X = A^{-1}B$ என்பது (1)–இன் தீர்வாகும்.

எனவே X என்கிற தீர்வு வெக்டர் காண A^{-1}-ஐக் காண்பது அவசியமாகிறது. மேலும் இத்தீர்வு ஒருமைத் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7 : *நேர்மாறு அணிகாணல் முறையில் தீர்க்க* ***:***

$x + y = 3,\quad 2x + 3y = 8$

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

இங்கு $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

A பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} காணமுடியும்.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ என்பது தீர்வாகும்.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, \quad y = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 1.8 : *நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க* **:**

$2x - y + 3z = 9, \; x + y + z = 6, x - y + z = 2$

தீர்வு **:** *தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\,X = B, \text{ இங்கு } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

A–ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணி, எனவே A^{-1}-ஐக் காண முடியும்.

இணைக்காரணிகளானவை $A_{11} = 2, \; A_{12} = 0, \; A_{13} = -2$

$A_{21} = -2, \; A_{22} = -1, \; A_{23} = 1, \; A_{31} = -4, A_{32} = +1, \; A_{33} = 3$

இணைக்காரணிகளால் உருவாக்கப்படும் அணி

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A\text{-இன் சேர்ப்பு அணி} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{adj } A$$

$$A\text{-இன் நேர்மாறு அணி} = \frac{1}{|A|}\,(\text{adj } A)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

தீர்வானது $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x = 1,\ y = 2, z = 3$

பயிற்சி 1.2

நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் பின்வரும் நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்க்கவும்.

(1) $2x - y = 7, \quad 3x - 2y = 11$

(2) $7x + 3y = -1, \quad 2x + y = 0$

(3) $x + y + z = 9, \quad 2x + 5y + 7z = 52, \quad 2x + y - z = 0$

(4) $2x - y + z = 7, \quad 3x + y - 5z = 13, \quad x + y + z = 5$

(5) $x - 3y - 8z + 10 = 0, \quad 3x + y = 4, \quad 2x + 5y + 6z = 13$

1.4 ஒரு அணியின் தரம் (Rank of a Matrix) :

ஒவ்வொரு அணியுடனும், அதன் தரம் என்கிற ஒரு குறையற்ற முழு எண்ணைத் தொடர்பு படுத்தலாம். ஒரு அணியின் தரம் என்கிற கொள்கையானது சமபடித்தான மற்றும் அசமபடித்தான சமன்பாட்டு தொகுப்புகளைத் தீர்ப்பதில் மிகவும் முக்கிய பங்கினை வகிக்கின்றது,

ஒரு அணியின் தரத்தை வரையறுக்க, உப அணி (Submatrix) மற்றும் அணியின் சிற்றணிக்கோவை (Minor of a matrix) ஆகியவற்றை வரையறுத்தல் அவசியமாகும். A என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி என்க. இதிலிருந்து சில நிரைகளையும் சில நிரல்களையும் நீக்குவதால் கிடைக்கும் அணி A-இன் ஒரு உப அணியாகும். குறிப்பாக A-ஐயே நாம் A-இன் ஒரு உப அணியாகக் கருதலாம். A-இன் ஏதேனும் ஒரு சதுர உப அணியின் அணிக்கோவையைத்தான் A-இன் சிற்றணிக்கோவை என்பர். சதுர உப அணியின் வரிசை r எனில், அதற்குரிய சிற்றணிக் கோவையின் வரிசையும் r எனக் கொள்ளப்படும்.

வரையறை :

A என்கிற அணியின் தரம் r எனில் பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக வேண்டும்.

(i) *A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையாவது பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.*

(ii) *A-இன் ஒவ்வொரு $(r + 1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியங்களாகியிருத்தல் வேண்டும்.*

மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து ஒரு அணி A-இன் தரம் என்பது அதன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை என்பதை அறிகிறோம்.

A-ன் தரத்தை $\rho(A)$ எனக் குறிப்பிடுவர். ஒரு பூச்சிய அணியின் தரம் ஆனது பூச்சியம் என வரையறுக்கப்படும்.

n வரிசை கொண்ட அலகு அணியின் தரம் n ஆகும். ஒரு $m \times n$ அணி A-இன் தரமானது m மற்றும் nஆல் எது குறைவானதோ அம்மதிப்புக்கு மிகாததாக அமையும். $\therefore\ \rho(A) \leq \min\{m, n\}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.9 : $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *என்க. இது 2ஆம் வரிசை அணி.*

எனவே A-இன் சிற்றணிக் கோவையின் உச்ச வரிசையும் 2.

இச்சிற்றணிக் கோவை = $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

எனவே, A-இன் பூச்சியமாகாத சிற்றணிக் கோவையின் உச்ச வரிசை 2. $\therefore\ \rho(A) = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 1.10 : $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *என்கிற அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *என்க.*

A-இன் உச்ச வரிசை சிற்றணிக் கோவை $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. *இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக் கோவை பூச்சியமாவாதால் $\rho(A) \neq 2$. எனவே முதல் வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகள் A-இல் உள்ளனவா எனப் பார்ப்போம். A-இல் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் இருப்பதால், இது சாத்தியமாகும். $\therefore\ \rho(A) = 1$.*

எடுத்துக்காட்டு 1.11 : $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *என்க.*

A-*இன் உச்ச வரிசை சிற்றணிக் கோவை*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

3-*ஆம் வரிசை சிற்றணிக் கோவை பூச்சியமாவதால்,* $\rho(A) \neq 3$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

$\therefore$ A-*ஆனது* 2-*ஆம் வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவை ஒன்று பெற்றுள்ளதால்,* $\rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 1.12 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ **என்க.**

இது 3×4 *வரிசை அணி.*

$\therefore$ A-*இன் சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை* 3. *அவை*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

எல்லா 3-ஆம் வரிசை சிற்றணிக் கோவைகளும் பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 3$. அடுத்து 2-ஆம் வரிசையில் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவை ஏதேனும் ஒன்று உள்ளதா எனப் பார்ப்போம். இது சாத்தியமாகும். ஏனெனில் $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \therefore \ \rho(A) = 2$

குறிப்பு : மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நாம் அறிவது யாதெனில் ஒரு அணியின் தரம் காண நிறைய அணிக் கோவைகளை மதிப்பிட வேண்டியுள்ளது. நிரைகள் மற்றும் நிரல்களுக்குரிய சாதாரண உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் அணிக்கோவைகளை மதிப்பிடுவதில் ஆகும் சிரமத்தைக் குறைக்க முடியும். இவ்வுருமாற்றங்கள், தரம் காணல் மற்றும் அதனோடு தொடர்புடைய மற்ற பிரச்சினைகளை எளிதில் தீர்க்க மிகவும் உதவியாக இருக்கும்.

1.4.1 ஒரு அணியின் மீதான சாதாரண உருமாற்றங்கள் (Elementary transformations on a Matrix) :

(i) ஏதேனும் இரு நிரைகளை (அல்லது நிரல்களை) இடமாற்றம் செய்தல்.

(ii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலியால் பெருக்குதல்.

(iii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள உறுப்புகளை மற்றொரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுடன் ஒரே மாறிலியால் பெருக்கி கூட்டுதல்.

மேற்கண்ட சாதாரண உருமாற்றங்களை வரிசைக்கிரமமாக பின்வரும் குறியீடுகளைக் கொண்டு குறிப்பிடலாம்.

(i) $R_i \leftrightarrow R_j \ \ (C_i \leftrightarrow C_j)$; (ii) $R_i \to kR_i \ \ (C_i \to kC_i)$

(ii) $R_i \to R_i + kR_j \ \ (C_i \to C_i + kC_j)$

A மற்றும் B என்பவை சமவரிசை கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து ஒரு முடிவான எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். A என்ற அணி B என்ற அணிக்குச் சமானமாயுள்ளதை $A \sim B$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடலாம்.

கொள்கை (நிரூபணமின்றி) :

சமான அணிகள் சமமான தரங்களைப் பெற்றிருக்கும்.

ஒரு அணியின் ஏறுபடி வடிவம் (Echelon form of a matrix) :

A என்பது ஒரு $m \times n$ வரிசை அணி என்க. இவ்வணி ஏறுபடி வடிவில் (முக்கோண வடிவில்) உள்ளதாயின் பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக வேண்டும்.

(i) எல்லாமே பூச்சிய உறுப்புகளாய்க் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புடைய நிரைக்கு கீழே அமைதல் வேண்டும்.

(ii) ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற நிரையின் முதல் உறுப்பு 1ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

(iii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையை விடக் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

மேற்கண்ட சாதாரண உருமாற்றங்களை ஒரு அணியின் மீது செலுத்துவதன் மூலம் அந்த அணியை ஏறுபடி வடிவிற்கு எளிதாகக் கொண்டு வரமுடியும்.

கொள்கை (*நிரூபணமின்றி*) :

ஏறுபடி வடிவில் உள்ள அணியின் தரமானது அவ்வணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும்.

***குறிப்பு* :**

(1) மேற்கண்ட நிபந்தனைகசளில் நிபந்தனை (ii) விடப்பட்டாலும் பாதகமில்லை, இதனால் மேற்கூறிய கொள்கை பாதிக்கப்படாது. (அ.து.), ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற எண் 1 அல்லாத வேறு எண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

(2) ஏறுபடி வடிவின் மூலம் ஒரு அணியின் தரத்தை நாம் மிக எளிதில் காண முடியும். இங்கு அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காண வேண்டிய அவசியமில்லை. வெறும் பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கையை மட்டும் காண்பது போதுமானது.

ஒரு அணியை ஏறுபடி வடிவிற்கு மாற்றி அதன் தரம் காணும் முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.13 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

***தீர்வு* :** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ என்க.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால் $\rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 1.14 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ *என்க.*

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் ஒரே ஒரு பூச்சியமற்ற நிரை உள்ளதால், $\rho(A) = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 1.15 : $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *என்க.*

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} C_1 \leftrightarrow C_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 - 4R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} R_2 \to -\frac{1}{5} R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. மேலும் பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 *என்பதால்* $\rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 1.16 : $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் காண்க.*

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ $R_1 \leftrightarrow R_2$ *என்க.*

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3. $\therefore \rho(A) = 3$

பயிற்சி 1.3

பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

1.5 நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குரிய ஒருங்கமைவுத்தன்மை

(Consistency of a system of linear equations) :

அறிவியலின் பல்வேறு பிரிவுகள், பொறியியல், பொருளியல், வணிகவியல் ஆகிய பல்வேறு துறைகளில் நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்புகள் இயல்பாகவே இடம்பெறுவதைக் காணலாம். மின்னணு சுற்றுகளின் பகுப்பாய்வு, இராசாயன தொழிற்சாலைகளின் வெளிப்பாட்டைத் தீர்மானித்தல் போன்ற பல்வேறு துறைகளில் எழும் பிரச்சினைகளின் தீர்வுகள், அவற்றிற்குரிய நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதைச் சார்ந்து அமைகின்றன. எனவே, அத்தகைய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க மேற்கொள்ளக்கூடிய முறைகள் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவையாகும். இவற்றின் தொடர்பாக, அணிகள் மற்றும் அணிக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள் மிகவும் முக்கிய பங்கை வகிக்கின்றன.

அணி நேர்மாறு முறையில் நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பைத் தீர்ப்பதைப் பற்றி முன்னரே பார்த்தோம். சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும் மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாயிருக்கும்போது மட்டுமே அணி நேர்மாறு முறையைப் பயன்படுத்த முடியும். மேலும் கெழுக்களின் அணி பூச்சியமற்றக் கோவை அணியாகவும் இருக்க வேண்டும். இம்முறையில் பெறப்படும் தீர்வு ஒரு ஒருமைத் தீர்வாகும். ஆனால், பொதுவாக எல்லா பிரச்சினைகளிலும் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாயிருக்க வேண்டிய தேவையில்லை. அப்படிப்பட்ட சமயங்களில் பின்வரும் மூன்று நிலைகள் எழ வாய்ப்பு உண்டு. சமன்பாட்டு தொகுப்புக்கு (1) *ஒரே ஒரு தீர்வு இருக்கலாம்* (2) *ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வு இருக்கலாம்* (3) *யாதொரு தீர்வுமே இல்லாமல் இருக்கலாம்.*

ஒரே ஒரு தீர்வோ அல்லது யாதொரு தீர்வுமே இல்லாதிருக்கும் தொகுப்பு மேலாய்வில் யாதொரு முக்கியத்துவமும் பெறுவதில்லை. மேலும் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட தீர்வுகள் கொண்ட தொகுதியின் தீர்வுகள் அனைத்துமே குறிப்பிடத்தக்கனவாய் அமைவதில்லை. இவற்றுள் சில தீர்வுகள் மற்றவைகளைக் காட்டிலும் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவையாக இருக்கும். அவைகளுள் சிறந்த தீர்வினை தேர்ந்தெடுத்தல் அவசியமாகும். நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க மிகவும் உதவியாக இருக்கக்கூடிய

(1) '*கிரேமர் விதி*' *முறை (அல்லது அணிக்கோவை முறை)*

(2) *தர முறை ஆகியவற்றைப் பற்றி இப்பகுதியில் காண்போம்.*

இம்முறைகளின் மூலம் தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு தீர்வு உள்ளதா, இல்லையே என்பதை தீர்மானிக்க இயலுவதோடு மட்டுமின்றி, அவ்வாறு தீர்வு இருப்பின் அதனைக் காண்பதும் சாத்தியமாகிறது.

1.5.1 தீர்வு கணங்களின் வடிவியல் பண்புகள் **(The Geometry of Solution sets) :**

நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வு கணமானது தனித்தனிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு கணங்களின் வெட்டுக்கணமாகும். அதாவது தொகுப்பின் எந்தவொரு தீர்வும், அத்தொகுப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டுக்கும் தீர்வாக அமையும். $ax = b$ $(a \neq 0)$ *என்ற சமன்பாட்டிற்கு* $x = b/a$ *ஆனது ஒரு ஒருமைத் தீர்வு ஆகும். இது நேர்க்கோட்டின் மீது அமைந்த ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும். இவ்வாறாக, இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரே ஒரு நேரிய சமன்பாட்டின் தீர்வு கணமானது தளத்தில் அமைந்த ஒரு நேர்க்கோடாகும். மூன்று மாறிகளில் அமைந்த ஒரே ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டின் தீர்வு கணமானது மூவளவை வெளியில் அமைந்த ஒரு தளமாகும்.*

விளக்க எடுத்துக்காட்டு **I :** *(மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை ≥ சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை)*

பின்வரும் மூன்று வெவ்வேறான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை ஆராய்வோம்.

(i) $2x = 10$ (ii) $2x + y = 10$ (iii) $2x + y - z = 10$

(i)*-இன் தீர்வு :* $2x = 10 \Rightarrow x = 5$

(ii)*-இன் தீர்வு :* $2x + y = 10$

இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புகளை ஒரே சமன்பாட்டிலிருந்து அறிய வேண்டும். இதற்கு நாம் x*-க்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பளித்து அதிலிருந்து* y*-க்கு தீர்வு காணலாம். அல்லது* y*-க்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பளித்து அதிலிருந்து* x *க்கு தீர்வு காணலாம்.*

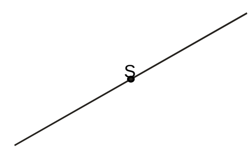
$x = k \Rightarrow y = (10 - 2k)$

இவ்வாறாக தீர்வினை 'k'*-இன் மூலமாக பெறுகிறோம்.* 'k'*-க்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் தருவதன் மூலம் நாம் குறிப்பிட்ட தீர்வுகளைப் பெற முடியும். எடுத்துக்காட்டாக*

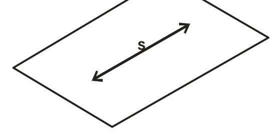
$k = 1, 2, 5, -3, \frac{1}{2}$ *எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் முறையே*

$(1, 8)$, $(2, 6)$, $(5, 0)$, $(-3, 16)$ *மற்றும்* $\left(\frac{1}{2}, 9\right)$

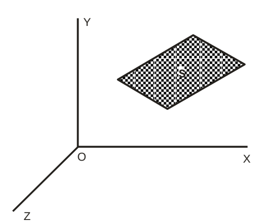
ஆகிய தீர்வுகளைப் பெறுகிறோம்.



படம் 1.1



படம் 1.2



படம் 1.3

(iii)*-இன் தீர்வு :* $2x + y - z = 10$

இங்கு x, y, z ஆகிய மூன்று மாறிகளின் மதிப்புகளை ஒரு தனிச் சமன்பாட்டின் மூலம் காண வேண்டியுள்ளது. இதற்கு, ஏதேனும் இரு மாறிகளுக்கு ஏதேனும் மதிப்புகளை அளித்து அதனின்றும் மூன்றாவது மாறிக்கு தீர்வு காணலாம்.

$x = s, y = t$ எனக் கொண்டால் $z = 2s + t - 10$ ஆகும். இவை தீர்வு கணத்தைத் தரும்.

s மற்றும் t-இன் வெவ்வேறான மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறான தீர்வுகளை அடைகிறோம்.

1.5.2 'கிரேமர் விதி' முறை [அணிக்கோவை முறை] (Cramer's Rule Method [Determinant Method]) :

கேப்ரியல் கிரேமர் (1704 – 1752) என்பவர் ஒரு சுவிஸ் கணிதமேதை. இவர் தத்துவம், அரசு விதி, கணித வரலாறு போன்ற பல தலைப்புகளில் புத்தகங்களை எழுதியுள்ளார், இவர் ஒரு அரசு அலுவலர், ஆலயங்களைப் புதுப்பித்தல், புராதனப் பொருள்களைத் தோண்டி எடுத்தல் போன்ற வேலைகளில் ஈடுபடும் தொழிலாளர்களுக்கு சிறப்புப் பயிற்சி அளிப்பதில் வல்லவர். இவர் திருமணமாகாதவர். தம்முடைய சிறந்த பணிகளுக்காக பல்வேறு விருதுகளைப் பெற்றவர்.

கிரேமரின் தேற்றமானது n மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த n நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு தீர்வு காண்பதற்கு மிகவும் உதவியாக இருக்கக்கூடிய ஒரு சூத்திரத்தை நமக்குத் தருகிறது, இச்சூத்திரத்தை கிரேமரின் விதி என்கிறோம். இதன் மூலம் தீர்வுகளைக் கணிப்பதோடு மட்டுமின்றி, அவற்றின் கணித ரீதியான பண்புகளைப் பற்றியும் அறிய முடிகிறது.

தேற்றம்1.1 (நிரூபணமின்றி) **கிரேமரின் விதி :** $AX = B$ என்பது n மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு என்க. $\det(A) \neq 0$ என்க. அவ்வாறாயின் தரப்பட்ட தொகுப்பிற்கு ஒரு ஒருமைத் தீர்வு காண முடியும். இத்தீர்வானது

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \dots\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

இங்கு A_j என்ற அணியானது A-இன் j-வது நிரலிலுள்ள உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ என்ற அணியிலுள்ள உறுப்புகளைப் பிரதியிடக் கிடைக்கும் அணியாகும்.

***இரண்டு மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த சமச்சீரற்ற சமன்பாடுகளுக்குரிய கிரேமரின் விதி* (Cramer's Rule for Non homogeneous equations of 2 unknowns) :**

இரண்டு மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் 'x', 'y'-இல் அமைந்த இரண்டு நேரியச் சமன்பாடுகள் கொண்ட தொகுப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \qquad \dots \text{(i)}$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 \qquad \dots \text{(ii)}$$

$$\text{Let} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \; x \,.\, \Delta = x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} \\ a_{21}x & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 - a_{12}y & a_{12} \\ b_2 - a_{22}y & a_{22} \end{vmatrix}$$ ((i) *மற்றும்* (ii) *சமன்பாடுகளிலிருந்து*)

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$ (*அணிக்கோவை பண்புகளின்படி*)

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - y \,.\, 0$$ (*அணிக்கோவை பண்பின்படி*)

$$x \,.\, \Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_x$$ (*என்க*)

$$y \,.\, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_y$$ (*என்க*)

இங்கு Δ_x*ஐ* Δ*-இன் முதல் நிரலை* $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$*-ஆல் பிரதியிடுவதாலும்* Δ_y *ஐ* Δ*-இன் இரண்டாம் நிலை* $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$*–ஆல் பிரதியிடுவதாலும் பெறலாம்.*

$$x\Delta = \Delta_x \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

$$y\Delta = \Delta_y \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$ ($\Delta \neq 0$*ஆக இருக்கும் வரை*)

$\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ ஆகியவை ஒருமை மதிப்புடையதானவை ஆதால், மேற்கண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கும் ஒரு ஒருமைத் தீர்வே கிடைக்கும். (ஒருங்கமைவு உள்ளது). மேலே விவரிக்கப்பட்ட முறையைத்தான் ***கிரேமரின் விதி*** என்கிறோம். இது $\Delta \neq 0$ என இருக்கும்போது மட்டுமே செயற்படுத்த முடியும் என்பதை அறிக.

$\Delta = 0$ ஆக இருக்கையில் தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளதாகவோ அல்லது ஒருங்கமைவு அற்றதாகவோ இருக்கலாம்.

நிலை 1 : $\Delta = 0$ *மற்றும்* $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ மேலும் $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ஆகிய கெழுக்களில் ஏதேனும் ஒன்றும் பூச்சியமற்றதாயின், தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் காணமுடியும். எனவே, இந்நிலையில் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும்.

நிலை 2 : $\Delta = 0$ *மற்றும்* Δ_x, Δ_y-களில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்றதாயின், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றதாகும். அதாவது, அதற்கு தீர்வு காண முடியாது.

இந்நிலைகளை விளக்குவதற்கு ஏதுவாக, இரு மாறிகளில் அமைந்த பின்வரும் மூன்று சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

(1) $x + 2y = 3$, $x + y = 2$ (2) $x + 2y = 3$, $2x + 4y = 6$ (3) $x + 2y = 3$, $2x + 4y = 8$

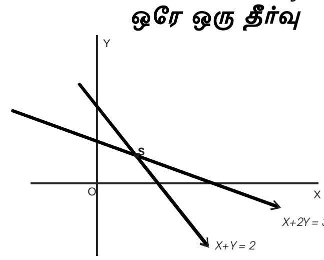
தீர்வு (1) :

ஒரே ஒரு தீர்வு

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ என்க.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$



படம் 1.4

$\Delta \neq 0$ என்பதால், தொகுப்பிற்கு ஒரு தனித்தீர்வு கிடைக்கும். கிரேமரின் விதிப்படி,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1 \;;\; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1 \qquad \therefore (x, y) = (1, 1)$$

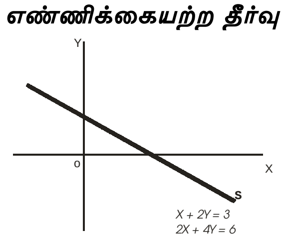
தீர்வு (2) :

எண்ணிக்கையற்ற தீர்வு

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ என்க.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$



படம் 1.5

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, மேலும் $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$–களில் குறைந்தது ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாயின் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். மேற்கண்ட தொகுப்பு $x + 2y = 3$ என்ற ஒரு தனிச்சமன்பாடாக மாறும். இதனைத் தீர்க்க $y = k$ எனக் கொண்டு, $x = 3 - 2y = 3 - 2k$

$\therefore$ தீர்வானது $x = 3 - 2k, y = k \;\; ; \;\; k \in \boldsymbol{R}$

k-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு, வெவ்வேறு தீர்வுகள் பெறலாம். குறிப்பாக (1, 1), (– 1, 2), (5 – 1) மற்றும் (8, – 2.5) ஆகியவை முறையே $k = 1, 2, -1$ மற்றும் -2.5 எனப்பிரதியிடுவதால் பெறப்படும் தீர்வுகளாகும்.

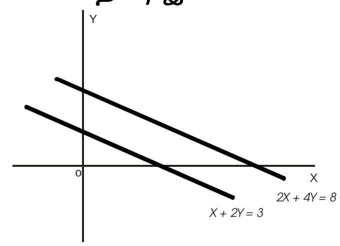
***தீர்வு* (3) :**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -4 \;;\; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$. எனவே தொகுப்பு ஒருங்கமைவு இல்லாதது. ஆகவே தீர்வு காண முடியாது.

தீர்வு இல்லை



படம் 1.6

***1.5.3 மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட சமச்சீரற்ற சமன்பாடுகள்* (Non homogeneous equations of three unknowns) :**

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$

$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$ என்கிற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

முன்பு விவரிக்கப்பட்டது போலவே Δ, Δ_x, Δ_y மற்றும் Δ_zஐ வரையறுப்போம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

இரண்டு மாறிகளுக்கு விவாதித்தது போலவே, மேற்கண்ட தொகுப்பின் தீர்த்தலுக்குரிய விதிமுறைகளைக் காண்போம்.

நிலை* 1 :** $\Delta \neq 0$ எனில் தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். ***கிரேமர் விதியைப் பயன்படுத்தி தொகுப்பின் தீர்வைக் காணலாம்.

***நிலை* 2 : $\Delta = 0$ எனில் மூன்று முக்கிய [உபநிலைகளை] அடைகிறோம்.**

***உபநிலை* 2(a) :** $\Delta = 0$ மற்றும் Δ_x, Δ_y, Δ_z-ல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு பூச்சியமற்றதாயின், தொகுப்பிற்கு தீர்வு காணமுடியாது. இந்நிலையில் சமன்பாடுகள் தீர்க்கத் தக்கவை அல்ல.

***உபநிலை* 2(b) :** $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ மேலும் Δ-வின் 2×2 சிற்றணி கோவை பூச்சியமற்றதாயின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும். இந்நிலையில் மூன்று சமன்பாடுகளானவை, இரண்டு சமன்பாடுகளாகக் குறைந்து விடும். இதனைத் தீர்க்க இரண்டு தகுந்த சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் ஒன்றிற்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பினை தந்து அதன் மூலம் மற்ற இரு மாறிகளின் மதிப்புளையும் காணலாம்.

***உபநிலை* 2(c) :** $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ மேலும் எல்லா (2×2) சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்பு பூச்சியங்களாகி ஆனால் Δவின் குறைந்தது ஒரு உறுப்பாவது பூச்சியமற்றதாயின் ($a_{ij} \neq 0$), தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதாகும். எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும். இந்நிலையில் தரப்பட்ட தொகுப்பானது ஒரே ஒரு சமன்பாட்டிற்கு குறையும். இதனைத் தீர்க்க ஏதேனும் இரு மாறிகளுக்கு ஏதேனும் மதிப்புகளைத் தந்து அவற்றின் மூலம் மூன்றாவது மாறியின் மதிப்பை அறியலாம்.

***உபநிலை* 2(d) :** $\Delta = 0$, $\Delta_x = \Delta y = \Delta z = 0$ மேலும் Δவில் உள்ள எல்லா 2×2 சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்பு பூச்சியங்களாகி, ஆனால் Δ_x அல்லது Δ_y அல்லது Δ_z-ன் ஏதேனும் ஒரு 2×2 சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமற்றதாக இருப்பின், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றதாகும்.

தேற்றம் 1.2 (*நிரூபணமின்றி*) :

ஒரு அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாயிருந்து ஒருங்கமைவு உடையதாயும் இருப்பின், அத்தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

மேற்கண்ட நிலைகளை விளக்குவதற்கு ஏதுவாக பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

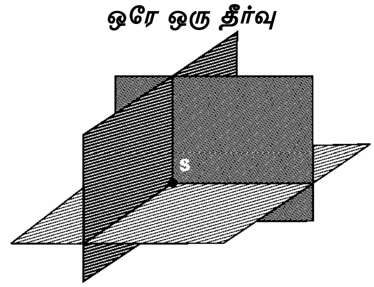
(1) $2x + y + z = 5$	(2) $x + 2y + 3z = 6$	
$x + y + z = 4$	$x + y + z = 3$	
$x - y + 2z = 1$	$2x + 3y + 4z = 9$	
(3) $x + 2y + 3z = 6$	(4) $x + 2y + 3z = 6$	(5) $x + 2y + 3z = 6$
$2x + 4y + 6z = 12$	$x + y + z = 3$	$2x + 4y + 6z = 12$
$3x + 6y + 9z = 18$	$2x + 3y + 4z = 10$	$3x + 6y + 9z = 24$

***தீர்வு* (1) :**

$$2x + y + z = 5 \;;\; x + y + z = 4 \;;\; x - y + 2z = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$



படம் 1.7

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad ; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta = 3, \Delta_x = 3, \Delta_y = 6, \Delta_z = 3$$

$\because \Delta \neq 0$ கிரேமரின் விதிப்படி தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் இருக்கும்.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1$$

$\therefore x = 1,\; y = 2,\; z = 1$ தீர்வாகும்.

$$(x, y, z) = (1, 2, 1)$$

***தீர்வு* (2) :**

$$x + 2y + 3z = 6 \;;\; x + y + z = 3 \;;\; 2x + 3y + 4z = 9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ஆனால் குறைந்தது ஒரு 2×2 சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமற்றதாயிருப்பதால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

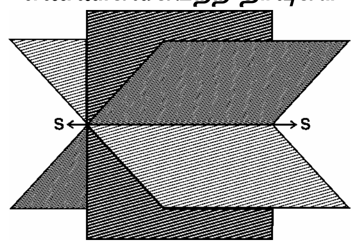
தரப்பட்ட தொகுப்பு இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கு குறையும் $z = k$ எனக் கொள்வதன் மூலம் முதல் இரு சமன்பாடுகளாவன,

$$x + 2y + 3k = 6$$
$$x + y + k = 3$$

i.e.,
$$x + 2y = 6 - 3k$$
$$x + y = 3 - k$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்



படம் 1.8

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6-3k & 2 \\ 3-k & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3k - 6 + 2k = -k$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6-3k \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 3 - k - 6 + 3k = 2k - 3$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-k}{-1} = k$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2k-3}{-1} = 3 - 2k$$

$\therefore$ தீர்வானது $x = k, y = 3 - 2k$ மற்றும் $z = k$

i.e. $(x, y, z) = (k, 3 - 2k, k).\quad k \in R$

குறிப்பாக $k = 1, 2, 3, 4$ எனக் கொள்வதன் மூலம் முறையே

$(1, 1, 1), (2, -1, 2), (3, -3, 3), (4, -5, 4)$ ஆகியவற்றை அடையலாம்.

***தீர்வு* (3) :**

$$x + 2y + 3z = 6 \;;\quad 2x + 4y + 6z = 12 \;;\quad 3x + 6y + 9z = 18$$

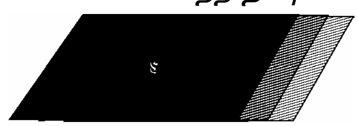
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 12 & 4 & 6 \\ 18 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 12 & 6 \\ 3 & 18 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

இங்கு $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

மேலும் எல்லா 2×2 சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியம் ஆகின்றன. Δ-ன் குறைந்தது ஒரு உறுப்பாவது பூச்சியமற்றதாதலால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். மேற்கண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒரு சமன்பாட்டுக்கு குறையும்.

எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்



படம் 1.9

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பானது $x + 2y + 3z = 6$ ஆகும்.

$y = s, z = t$ எனுமாறு ஏதேனுமிரு மதிப்புகளைத் தர,

$x = 6 - 2y - 3z = 6 - 2s - 3t$

$\therefore$ தீர்வானது $x = 6 - 2s - 3t, \quad y = s, \quad z = t$

i.e. $(x, y, z) = (6 - 2s - 3t, s, t) \quad s, t \in R$

s, t-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு பல்வேறு தீர்வுகளை அடைகிறோம்.

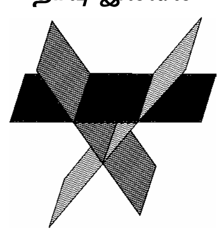
***தீர்வு* (4) :**

$x + 2y + 3z = 6 \; ; \quad x + y + z = 3 \; ; \quad 2x + 3y + 4z = 10$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

தீர்வு இல்லை



படம் 1.10

$\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ என்பதால் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றதாகும். (Δ_x, Δ_y, Δ_z-இல் குறைந்தது ஒன்றாவது பூச்சியமற்றது) $\therefore$ தீர்வு கிடையாது.

***தீர்வு* (5) :**

$x + 2y + 3z = 6 \; ; \quad 2x + 4y + 6z = 12 \; ; \quad 3x + 6y + 9z = 24$

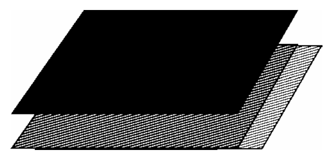
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 12 & 4 & 6 \\ 24 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 12 & 6 \\ 3 & 24 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 0$$

இங்கு $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Δ-இன் எல்லா 2×2 அணிக் கோவை மதிப்புகள் பூச்சியங்கள் ஆகும். ஆனால் Δ_x அல்லது Δ_y-இன் ஒரு 2×2 அணிக்கோவையின் மதிப்பானது பூச்சியமற்றதாயுள்ளதால், (Δ_x-இல் உள்ள 3-இன் சிற்றணிக்கோவை $\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 24 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$)
தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றதாகும். எனவே இதற்கு தீர்வு கிடையாது.

தீர்வு இல்லை



படம் 1.11

எடுத்துக்காட்டு 1.17: *அணிக்கோவை முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க.*

(1) $x + y = 3,\quad 2x + 3y = 7$

(2) $2x + 3y = 8,\quad 4x + 6y = 16$

(3) $x - y = 2,\quad 3y = 3x - 7$

தீர்வு

(1) : $x + y = 3 \;;\; 2x + 3y = 7$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$, ; $\because \Delta \neq 0$ என்பதால் ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 7 = 2 \;;\; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1$$

$$\Delta = 1, \quad \Delta_x = 2, \quad \Delta_y = 1$$

$\therefore$ *கிரேமரின் விதிப்படி,*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2 \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ *தீர்வு* $(x, y) = (2, 1)$

***தீர்வு* (2) :** $2x + 3y = 8 \;;\; 4x + 6y = 16$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 48 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = 0$ என்பதாலும், Δ-இன் குறைந்தது ஒரு கெழு a_{ij}ஆவது பூச்சியமற்று இருப்பதால், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

எல்லா 2×2 சிற்றணிக் கோவைகள் பூச்சியங்களாகவும், குறைந்தது ஒரு (1×1) சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமற்றது ஆதலால் தொகுப்பு ஒரே ஒரு தனிச்சமன்பாட்டிற்கு குறையும். x (அல்லது y)-க்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பளித்து y (அல்லது x)இன் மதிப்பைக் காணலாம்,

$x = t$ எனத் தர $y = \frac{1}{3}(8 - 2t)$.

$\therefore$ எனவே தீர்வு கணமானது $(x, y) = \left(t, \frac{8 - 2t}{3}\right), \quad t \in R$

குறிப்பாக

$(x, y) = (1, 2)$ $\quad$ $t = 1$ எனில்

$(x, y) = (-2, 4)$ $\quad$ $t = -2$ எனில்

$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ $\quad$ $t = -\frac{1}{2}$ எனில்

***தீர்வு* (3) :** $x - y = 2$; $3y = 3x - 7$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x \neq 0$ $\therefore$ தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. $\therefore$ தீர்வு கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.18 : பின்வரும் அசமபடித்தான சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க**:**

(1) $x + 2y + z = 7$, $2x - y + 2z = 4$, $x + y - 2z = -1$

(2) $x + y + 2z = 6$, $3x + y - z = 2$, $4x + 2y + z = 8$

(3) $2x + 2y + z = 5$, $x - y + z = 1$, $3x + y + 2z = 4$

(4) $x + y + 2z = 4$, $2x + 2y + 4z = 8$, $3x + 3y + 6z = 12$

(5) $x + y + 2z = 4$, $2x + 2y + 4z = 8$, $3x + 3y + 6z = 10$

***தீர்வு* :** $x + 2y + z = 7, \quad 2x - y + 2z = 4, \quad x + y - 2z = -1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15$$

$\therefore \Delta \neq 0$ *என்பதால் ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு.*

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \quad ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 30$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 30$$

$\Delta = 15, \quad \Delta_x = 15, \quad \Delta_y = 30, \quad \Delta_z = 30$

கிரேமர் விதிப்படி,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$$

$\therefore$ *தீர்வு* $(x, y, z) = (1, 2, 2)$

***தீர்வு* (2) :** $x + y + 2z = 6, \quad 3x + y - z = 2, \quad 4x + 2y + z = 8$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 0$ *மற்றும்* $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ மேலும் Δ-வின் (2×2) *சிற்றணிக்* கோவைகளில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்றது. ஆதலால், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும்.

இரு தகுந்த சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொண்டு, ஏதேனும் ஒரு மாறிக்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு தருவதன் மூலம் மற்ற இரு மாறிகளின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

$z = k \in R$ என்க.

$$x + y = 6 - 2k$$
$$3x + y = 2 + k$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6-2k & 1 \\ 2+k & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2k - 2 - k = 4 - 3k$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6-2k \\ 3 & 2+k \end{vmatrix} = 2 + k - 18 + 6k = 7k - 16$$

∴ *கிராமரின் விதிப்படி*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4-3k}{-2} = \frac{1}{2}(3k-4)$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7k-16}{-2} = \frac{1}{2}(16-7k)$$

∴ *தீர்வு கணமானது*

$$(x, y, z) = \left(\frac{3k-4}{2}, \frac{16-7k}{2}, k\right) \qquad k \in R$$

$k = -2$ *மற்றும்* 2*க்குரிய, குறிப்பிட்ட தீர்வுகளானவை, முறையே* $(-5, 15, -2)$ *மற்றும்* $(1, 1, 2)$ *ஆகும்*

***தீர்வு* (3) :** $2x + 2y + z = 5, \quad x - y + z = 1, \quad 3x + y + 2z = 4$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta = 0$ *மற்றும்* $\Delta_x \neq 0$ (Δ_x, Δ_y, Δ_z*-ன் மதிப்புகளில் குறைந்தது ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்றது*) *என்பதால், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. அதாவது இதற்கு தீர்வு கிடையாது.*

***தீர்வு* (4) :** $x + y + 2z = 4, \quad 2x + 2y + 4z = 8, \quad 3x + 3y + 6z = 12$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ மேலும் $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$-இன் எல்லா 2×2 சிற்றணிக் கோவை மதிப்புகளும் பூச்சியங்கள் ஆதலால் நிலை 2(*c*)-இன்படி அது ஒருங்கமைபு உடையது. எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். ($\because$ Δ-இன் குறைந்தது ஒரு கெழு a_{ij}-ஆவது பூச்சியமற்றதாயுள்ளதால், இத்தொகுப்பு ஒரே ஒரு சமன்பாட்டிற்கு குறையும்)

$x = s$ மற்றும் $y = t$ என்க. முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து

$z = \frac{1}{2}(4 - s - t)$ $\therefore$ தீர்வு கனமானது

$$(x, y, z) = \left(s,\ t,\ \frac{4 - s - t}{2}\right),\quad s, t \in R$$

$s = t = 1$ எனில் $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

$s = -1, t = 2$ எனில் $(x, y, z) = \left(-1,\ 2,\ \frac{3}{2}\right)$

***தீர்வு* (5) :** $x + y + 2z = 4, \qquad 2x + 2y + 4z = 8, \qquad 3x + 3y + 6z = 10$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 10 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. மேலும் Δ-ன் எல்லா 2×2 சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியமாவதாலும், Δ_x, Δ_y மற்றும் Δ_z-இன் சில சிற்றணிக் கோவைகள் பூச்சியமற்றதாயுள்ளதால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. எனவே அதற்கு தீர்வு கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.19 : ஒரு பையில் ரூ. 1, மற்றும் ரூ. 2, மற்றும் ரூ.5 நாணயங்கள் உள்ளன. ரூபாய் 100 மதிப்பிற்கு மொத்தம் 30 நாணயங்கள் உள்ளன. அவ்வாறாயின் ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள நாணயங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

***தீர்வு* :**

ரூ.1, ரூ.2 மற்றும் ரூ. 5 வகையில் உள்ள நாணயங்களின் எண்ணிக்கைகள் முறையே x, y மற்றும் z என்க. தரப்பட்ட விவரப்படி

$$x + y + z = 30 \qquad \text{(i)}$$

$$x + 2y + 5z = 100 \qquad \text{(ii)}$$

மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளும் ஆனால் இரண்டு சமன்பாடுகளும் மட்டுமே உள்ளன. zக்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு k அளித்து x மற்றும் y-இன் மதிப்பை காணலாம்.

சமன்பாடுகள் (i) மற்றும் (ii) ஆனது

(i) $\Rightarrow \quad x + y = 30 - k$

(ii) $\Rightarrow \quad x + 2y = 100 - 5k \qquad k \in R$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 30-k & 1 \\ 100-5k & 2 \end{vmatrix} = 3k - 40, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 30-k \\ 1 & 100-5k \end{vmatrix} = 70 - 4k$$

கிரேமரின் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3k - 40, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 70 - 4k$$

தீர்வு $(x, y, z) = (3k - 40, 70 - 4k, k) \quad k \in R$.

நாணயங்களின் எண்ணிக்கை ஒரு குறையற்ற முழு எண் ஆதலால் $k = 0, 1, 2 \ldots$

மேலும் $3k - 40 \geq 0$, மற்றும் $70 - 4k \geq 0 \Rightarrow 14 \leq k \leq 17$

எனவே, (2, 14, 14), (5, 10, 15), (8, 6, 16) மற்றும் (11, 2, 17) ஆகியவை சாத்தியத் தீர்வுகளாகும்.

1.5.4 சமபடித்தான நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (Homogeneous linear system) :

வலப்பக்கத்திலுள்ள மாறிலி உறுப்புகள் யாவும் பூச்சியங்களாகக் கொண்ட நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும். இதன் அமைப்பு

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0$$

இத்தொகுப்பு எப்போதுமே ஒருங்கமைவு உடையதாகும். ஏனெனில் $x_1 = 0, x_2 = 0 \ldots\ldots x_n = 0$ இதன் ஒரு தீர்வாகும். இத்தீர்வினை ***வெளிப்படைத் தீர்வு*** என்பர். மற்ற தீர்வுகள் இருக்குமாயின் அவற்றை ***வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள்*** என்பர்.

சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு பின்வருமாறு தீர்வுகள் அமைய வாய்ப்பு உள்ளது.

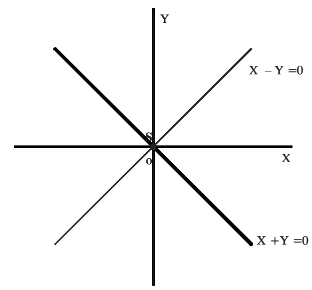
(i) வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டுமே அமைவது

(ii) வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டுமல்லாமல் எண்ணிக்கையற்ற வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளும் அமைவது.

எடுத்துக்காட்டாக இரண்டு மாறிகளில் அமைந்த இரண்டு சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$x + y = 0$$
$$x - y = 0$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஆதிவழியேச் செல்லும் இரண்டு நேர்கோடுகளைத் தருகின்றன. எனவே வெளிப்படை தீர்வானது இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான ஆதியாகும்.

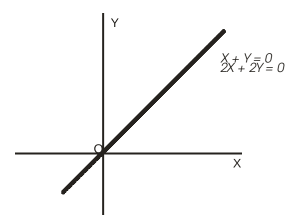


படம் 1. 12

கீழே தரப்பட்டுள்ள தொகுப்பு

$$x - y = 0$$
$$2x - 2y = 0$$

ஆதி வழியே செல்கின்ற ஒரே ஒரு நேர்க்கோடாகும். எனவே தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.



படம் 1.13

மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக இருக்கையில் வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் நிச்சயமாக கிடைப்பதற்கு வாய்ப்புகள் உண்டு.

தேற்றம் 1.3 : (*நிரூபணமின்றி*)

மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக கொண்ட சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20 :

தீர் :
$$x + y + 2z = 0$$
$$2x + y - z = 0$$
$$2x + 2y + z = 0$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$\because \Delta \neq 0$ ஆதலால் தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வினைக் கொண்டிருக்கும். எனவே மேற்கண்ட சமபடித்தான தொகுப்பு வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டுமே பெற்றிருக்கும்.

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.21 :

தீர் :

$$x + y + 2z = 0$$
$$3x + 2y + z = 0$$
$$2x + y - z = 0$$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\because \Delta = 0$ என்பதால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். மேலும் Δவின் குறைந்தது ஒரு 2×2 சிற்றணிக் கோவை பூச்சியமற்றதாய் இருப்பதால் இத்தொகுப்பானது இரண்டு சமன்பாடுகளாகக் குறையும். எனவே ஏதேனும் ஒரு மாறி ஏதேனும் ஒரு மதிப்பும் மற்ற இரு மாறிகளின் மதிப்பினை இதன் மூலம் காணலாம். $z = k$ என்க. முதல் மற்றும் கடைசி சமன்பாடுகளிலிருந்து நாம் எந்த இரண்டு சமன்பாடுகள் வேண்டுமானாலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்)

$$x + y = -2k$$
$$2x + y = k$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -2k & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = -3k, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2k \\ 2 & k \end{vmatrix} = 5k$$

கிரேமரின் விதிப்படி

$x = 3k, \quad y = -5k$

$\therefore (x, y, z) = (3k, -5k, k)$ தீர்வாகும்.

பயிற்சி 1.4

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க **:**

(1) $3x + 2y = 5$, $x + 3y = 4$

(2) $2x + 3y = 5$, $4x + 6y = 12$

(3) $4x + 5y = 9$
$8x + 10y = 18$

(4) $x + y + z = 4$
$x - y + z = 2$
$2x + y - z = 1$

(5) $2x + y - z = 4$
$x + y - 2z = 0$
$3x + 2y - 3z = 4$

(6) $3x + y - z = 2$
$2x - y + 2z = 6$
$2x + y - 2z = -2$

(7) $x + 2y + z = 6$
$3x + 3y - z = 3$
$2x + y - 2z = -3$

(8) $2x - y + z = 2$
$6x - 3y + 3z = 6$
$4x - 2y + 2z = 4$

(9) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = 1$; $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = 5$; $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} - \frac{2}{z} = 0$

(10) ஒரு சிறிய கருத்தரங்கு அறையில் 100 நாற்காலிகள் வைப்பதற்கு போதுமான இடமுள்ளது. மூன்று வெவ்வேறான நிறங்களில் நாற்காலிகள் வாங்க வேண்டியுள்ளது. (சிகப்பு, நீலம் மற்றும் பச்சை). சிகப்பு வண்ண நாற்காலியின் விலை ரூ.240, நீலவண்ண நாற்காலியின் விலை ரூ,260, பச்சைவண்ண நாற்காலியின் விலை ரூ,300. மொத்தம் ரூ,25,000 மதிப்புள்ள நாற்காலிகள் வாங்கப்பட்டது. அவ்வாறாயின் ஒவ்வொரு வண்ணத்திலும் வாங்கத்தக்க நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கைக்கு குறைந்தபட்சம் மூன்று தீர்வுகளைக் காண்க.

1.5.5 தர முறை (Rank method) :

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்ற n மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த m நேரியச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். (பகுதி 1.2-இல் உள்ளதுபோல்) இச்சமன்பாடுகளை

$AX = B$ என்ற அணிச்சமன்பாடாக எழுதிக் கொள்வோம். இங்கு $m \times n$ அணி Aஆனது கெழுக்களின் அணியாகும் (coefficient matrix). தொகுப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கக்கூடிய $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$-இன் மதிப்புகளை தொகுப்பிற்குரிய ஒரு தீர்வாகக் கொள்வர்.

குறைந்தபட்சம் ஒரு தீர்வாவது பெற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் என்பர். ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு ஒன்று அல்லது எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கலாம், ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் கொண்டிருப்பின் அத்தீர்வு ஒருமைத் தீர்வு எனப்படும். தீர்வு எதுவுமே பெறாத சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை ஒருங்கமையாச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு என்பர்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$ என்கிற m × (n + 1) அணியை தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி (augmented matrix) என்பர்.

AX = B என்கிற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததாயிருக்க தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதி யாதெனில் *A* மற்றும் [*A*, *B*] –இன் தரங்கள் சமமாயிருத்தலே ஆகும்.

சாதாரண உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் தரப்பட்ட நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வு மாறப்போவதில்லை. எனவே, தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை சாதாரண உருமாற்றங்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு சமானத் தொகுப்பிற்கு மாற்றி ஒருங்கமைத்தன்மையை ஆராய்ந்து தீர்வை எளிதில் காணலாம்.

ஒருங்கமைத்தன்மையை ஆராய மேற்கொள்ள வேண்டிய நிலைகள் :

(i) தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை *AX* = *B* என்கிற அணிச்சமன்பாடாக மாற்றி எழுதுக.

(ii) விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [*A*, *B*]–ஐக் காண்க

(iii) *A* மற்றும் [*A*, *B*]–க்களின் தரங்களைக் காண நிரைகளை மட்டுமே உட்படுத்தி சாதாரண உருமாற்றங்களை மேற்கொள்க. நிரல்களின் மீதான உருமாற்றங்களை மேற்கொள்ளக்கூடாது.

(iv) (அ) *A*-இன் தரம் ≠ [*A*, *B*]-இன் தரம், எனில் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமையாததாகும். இந்நிலையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு தீர்வு கிடையாது.

(ஆ) *A*-இன் தரம் = [*A*, *B*] –இன் தரம் = n என்க. இங்கு n என்பது மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையாகும். இந்நிலையில் *A*ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும். மேலும் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும். இத்தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வை மட்டும் காணலாம்.

(இ) *A*-இன் தரம் = [*A*, *B*]-இன் தரம் < n என்க. இந்நிலையிலும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததாகும். ஆனால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22 : தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து, அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க **:**

$$2x + 5y + 7z = 52, \qquad x + y + z = 9, \qquad 2x + y - z = 0$$

தீர்வு : *தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை பின்வருமாறு அணிச் சமன்பாடாக மாற்றி எழுதலாம்.*

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\,X = B$$

விரிபடுத்தப்பட்ட அணியானது

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 52 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 52 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \end{bmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + 3R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. அது மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளதால், $\rho[A, B] = 3$ *ஆகும்.*

மேலும் $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் இருப்பதால், $\rho(A) = 3$

$\rho(A) = \rho[A, B] = 3 =$ *மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.*

எனவே, இது ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும். மேலும் இதற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் காண முடியும்.

அத்தீர்வினை அடைய, தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்குச் சமானமான அணிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$x + y + z = 9 \qquad \ldots (1)$$

$$-y - 3z = -18 \qquad (2)$$

$$-4z = -20 \qquad \ldots (3)$$

$(3) \Rightarrow z = 5$; $(2) \Rightarrow y = 18 - 3z = 3$; $(1) \Rightarrow x = 9 - y - z \Rightarrow x = 9–3–5 = 1$

$\therefore$ தீர்வானது $x = 1, \quad y = 3, \quad z = 5$

எடுத்துக்காட்டு 1.23 : *பின்வரும் சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை ஆராய்க.*

$$2x - 3y + 7z = 5, \qquad 3x + y - 3z = 13, \qquad 2x + 19y - 47z = 32$$

தீர்வு : தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிச்சமன்பாடாக பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 19 & -47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$A\,X = B$$

விரிபடுத்தப்பட்ட அணியானது

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 19 & -47 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 19 & -47 & 32 \end{bmatrix} R_1 \to \frac{1}{2} R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 22 & -54 & 27 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - 4R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. அது மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளதால், $\rho[A, B] = 3$

மேலும். இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் இருப்பதால், $\rho(A) = 2$ ஆகும்.

$\rho(A) \neq \rho[A, B]$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு இல்லாதது என்பதால் தீர்வு காண முடியாது.

குறிப்பு : இக்கணக்கினை R_1-ஐ 2ஆல் வகுக்காமல் $R_2 \to 2R_2 - 3R_1$போன்ற உருமாற்றங்களை பயன்படுத்தியும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.24 : $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 14$, $x + 4y + 7z = 30$ ஆகிய *சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவன எனக்காட்டி அவற்றைத் தீர்க்கவும்.*

தீர்வு : *தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A\,X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 7 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - 3R_2$$

கடைசி சமான அணியில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால், $\rho(A, B) = 2$ ஆகும்.

A-இல் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால் $\rho(A) = 2$ ஆகும்.

$$\therefore\ \rho(A) = \rho(A, B) = 2 < 3$$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். ஆனால் தரத்தின் பொது மதிப்பானது மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையை விடக் குறைவாக உள்ளதால், தரப்பட்ட தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். அவற்றைக் காண்போம்.

தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது, பின்வரும் அணிச் சமன்பாட்டுக்குச் சமானமானதாகும்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + z = 6 \qquad \ldots (1)$$

$$y + 2z = 8 \qquad \ldots (2)$$

$(2) \Rightarrow y = 8 - 2z$; $(1) \Rightarrow x = 6 - y - z = 6 - (8 - 2z) - z = z - 2$

$z = k$ என எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் $x = k - 2$, $y = 8 - 2k$; என அடைகிறோம். $k \in R$

$k = 1$ எனில், $x = -1$, $y = 6$, $z = 1$-ஐ ஒரு தீர்வாகப் பெறுகிறோம். இவ்வாறாக k-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் தருவதன் மூலம், தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை அடையலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.25 : தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என சரிபார்த்து, அவ்வாறு ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அதனைத் தீர்க்கவும்.

$$x - y + z = 5, \quad -x + y - z = -5, \quad 2x - 2y + 2z = 10$$

தீர்வு : தரப்பட்ட தொகுப்பிற்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

கடைசி சமான அணியில் ஒரே ஒரு பூச்சியமற்ற நிரைதான் உள்ளது. எனவே $\rho[A, B] = 1$

மேலும் ஒரே ஒரு பூச்சியமற்ற நிரைதான் உள்ளது $\therefore \rho(A) = 1$

எனவே $\rho(A) = \rho[A, B] = 1$ எனவே தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். இருப்பினும் தரங்களின் பொதுவான மதிப்பானது மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையை விடக் குறைவாக இருப்பதால், எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். அவற்றைக் காண்போம். தரப்பட்ட தொகுப்பானது பின்வரும் அணிச்சமன்பாட்டிற்கு சமானமானதாகும்.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x - y + z = 5$, $y = k_1$, $z = k_2$ எனில் $x = 5 + k_1 - k_2$. k_1, k_2-இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு நமக்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும். $(k_1, k_2 \in R)$

எடுத்துக்காட்டு 1.26 : λ, μ-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ என்ற சமன்பாடுகள் (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும் (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$A\,X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \mu-10 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{matrix}$$

***நிலை* (i) :** $\lambda - 3 = 0$ *மற்றும்* $\mu - 10 \neq 0$ i.e. $\lambda = 3$ *மற்றும்* $\mu \neq 10$.

இந்நிலையில் $\rho(A) = 2$ *மற்றும்* $\rho[A, B] = 3$ $\therefore \rho(A) \neq \rho[A, B]$

எனவே தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு இல்லாதது. எனவே தீர்வு கிடைக்காது.

***நிலை* (ii) :** $\lambda - 3 \neq 0$ *மற்றும்* $\mu \in R$ i.e., $\lambda \neq 3$ *மற்றும்* $\mu \in R$

இந்நிலையில் $\rho(A) = 3$ *மற்றும்* $\rho[A, B] = 3$

$\rho(A) = \rho[A,\ B] = 3 =$ *மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.*

$\therefore$ *தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளது. எனவே ஒரே ஒரு தீர்வினை பெற்றிருக்கும்.*

***நிலை* (iii) :**

$\lambda - 3 = 0$ *மற்றும்* $\mu - 10 = 0$ i.e., $\lambda = 3$ *மற்றும்* $\mu = 10$

இந்நிலையில் $\rho(A) = \rho[A,\ B] = 2 <$ *மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.*

$\therefore$ *தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளது. ஆனால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.*

1.5.6 சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous linear Equations) :

சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு பின்வருமாறு:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n} x_n = 0$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n = 0$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} x_n = 0$

அதற்குரிய விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது

$$[A, B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix} = [A, \mathrm{O}]$$

A*-இன் தரம்* = $[A,\ \mathrm{O}]$*-இன் தரம் என்பது எப்பொழுதும் உண்மையாதலால், சமபடித்தான தொகுப்பானது எப்பொழுதும் ஒருங்கமைவு உடையதாயிருக்கும்.*

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0\ \ldots\ x_n = 0$ *என்பது எப்பொழுதும் இதன் ஒரு தீர்வாகும். இத்தீர்வை ஒரு வெளிப்படைத் தீர்வாகக் கருதுவர்.*

A*-இன் தரம்* $[A,\ B]$*-இன் தரத்திற்கு சமமாகவும் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையான* n*-ஐ விடக் குறைவாகவும் இருப்பின் இத்தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையான தீர்வுடன் வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.* A*-இன் தரம்* n*-ஆக இருப்பின், இத்தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையான தீர்வு மட்டுமே இருக்கும்.*

எடுத்துக்காட்டு 1.27 : *பின்வரும் சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.*

$x + 2y - 5z = 0, \quad 3x + 4y + 6z = 0, \quad x + y + z = 0$

தீர்வு : *தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்குரிய அணிச்சமன்பாடு*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad A\,X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 21 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 21 & 0 \end{bmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - 2R_2$$

பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3

$\rho[A, B] = 3$. மேலும் $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ *பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை* 3 $\therefore \rho(A) = 3$

$\therefore \rho(A) = \rho[A, B] = 3 =$ *மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை*

எனவே தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். இது ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.

அதாவது $x = 0, \ y = 0$ and $z = 0$

குறிப்பு **:** $\rho(A) = 3$ என்பதால் $|A| \neq 0$ $\therefore$ A பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும். இந்நிலையில் $x = 0, y = 0, z = 0$ என்ற வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டுமே கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28 : μ-இன் எம்மதிப்பிற்கு

$x + y + 3z = 0,\quad 4x + 3y + \mu z = 0,\quad 2x + y + 2z = 0$ என்ற தொகுப்பிற்கு (i) வெளிப்படைத் தீர்வு (ii) வெளிப்படையற்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

தீர்வு **:** தரப்பட்ட சமன்பாடுகளை $AX = B$ என எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & \mu \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & \mu & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & \mu-12 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & \mu-12 & 0 \\ 0 & 0 & 8-\mu & 0 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2$$

நிலை **(i) :** $\mu \neq 8$ எனில் $8 - \mu \neq 0$ எனவே 3 பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$\therefore$ $\rho[A] = \rho[A, B] = 3$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

எனவே தரப்பட்ட தொகுப்பிற்கு $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ என்கிற வெளிப்படைத் தீர்வு கிடைக்கும்.

நிலை **(ii) :**

$\mu = 8$ எனில் $\rho[A, B] = \rho(A) = 2$

$\therefore$ $\rho(A) = \rho[A, B] = 2 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

இந்நிலையில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். மேலும் எண்ணிக்கையற்ற வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளைப் பெறும். அவற்றைக் காண்போம். தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது $x + y + 3z = 0$; $y + 4z = 0$-க்குச் சமானமானதாகும்.

$\therefore\ y = -4z$; $x = z$, z = k எனக் கொள்வோமாயின்

$x = k,\ y = -4k,\ z = k$ $[k \in R - \{0\}]$ இவை வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளாகும்.

குறிப்பு : நிலை (ii)-இல் தொகுப்பு வெளிப்படையான தீர்வுடன் எண்ணிக்கையற்ற வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும், வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை மட்டும் காண நாம் $k = 0$-ஐ நீக்கியுள்ளோம்,

பயிற்சி 1.5

(1) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என்பதை ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க :

(i)	$4x + 3y + 6z = 25$	$x + 5y + 7z = 13$	$2x + 9y + z = 1$
(ii)	$x - 3y - 8z = -10$	$3x + y - 4z = 0$	$2x + 5y + 6z - 13 = 0$
(iii)	$x + y + z = 7$	$x + 2y + 3z = 18$	$y + 2z = 6$
(iv)	$x - 4y + 7z = 14$	$3x + 8y - 2z = 13$	$7x - 8y + 26z = 5$
(v)	$x + y - z = 1$	$2x + 2y - 2z = 2$	$-3x - 3y + 3z = -3$

(2) λ-இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வுகளை ஆராய்க.

$x + y + z = 2,$ $2x + y - 2z = 2,$ $\lambda x + y + 4z = 2$

(3) k-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$kx + y + z = 1,$ $x + ky + z = 1,$ $x + y + kz = 1$ have

(i) ஒரே ஒரு தீர்வு (ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வு

(iii) தீர்வு இல்லாமை பெறும்

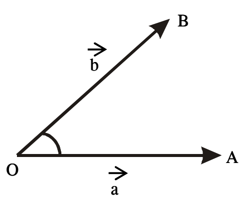
2. வெக்டர் இயற்கணிதம்
(VECTOR ALGEBRA)

2.1 அறிமுகம் :

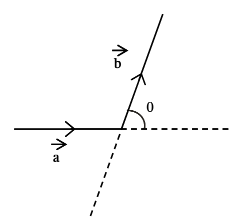
வெக்டர் கூட்டல், கழித்தல் என்ற இரண்டு செயல்களைப் பற்றி XI-ஆம் வகுப்பில் நாம் படித்தோம். இந்தப் பகுதியில் மற்ற ஒரு செயல் இரு வெக்டர்களின் பெருக்கல் பற்றி பார்க்கலாம். இரண்டு வெக்டர்களை இரண்டு விதங்களாகப் பெருக்கலாம். அவை திசையிலிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் என்பன ஆகும். இவற்றை வரையறுப்பதற்கு முன் இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைப் பற்றி பார்ப்போம்.

2.2 இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்
(Angle between two vectors) :

இரண்டு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஐ முறையே $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ என எடுத்துக் கொள்க. $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் என்பது அவ்விரு வெக்டர்களின் திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும். இவ்விரு திசைகளுமே வெட்டும் புள்ளியில் இருந்து குவியக் கூடியனவையாகவோ அல்லது விரியக் கூடியவையாகவோ இருக்கலாம்.



படம் 2. 1



படம் 2. 2

இரு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் அளவு θ எனில் $0 \le \theta \le \pi$ என்பது தெளிவாகும்.

2.3 திசையிலிப் பெருக்கம் அல்லது புள்ளிப் பெருக்கம்
(The Scalar product or Dot product) :

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்கின்ற பூச்சியமற்ற இரண்டு வெக்டர்களின் இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க. இவற்றின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\vec{a} \cdot \vec{b}$

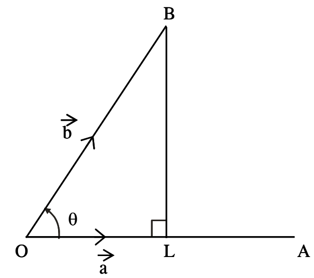
என்று குறிப்பிடப்படும் மேலும் இது $\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta$ என வரையறுக்கப்படும். i.e., $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = ab\cos\theta$

குறிப்பு : இரண்டு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் மூலம் நமக்கு கிடைப்பது ஒரு திசையிலி. எனவே இப்பெருக்கம் திசையிலிப் பெருக்கம் என அழைக்கப்படுகின்றது. மற்றும் $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற இரண்டு வெக்டர்களுக்கு நடுவே புள்ளி வைப்பதால் இதனை புள்ளி பெருக்கம் என்றும் கூறலாம்.

திசையிலிப் பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம் :

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ என்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இன் இடைப்பட்டக் கோணத்தை θ என்க. *B*இலிருந்து *OA*க்கு *BL* என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக.

OL என்பது $\vec{a}$ இன் மீது $\vec{b}$ இன் வீழல் ஆகும்.



படம் 2.3

ΔOLBஇருந்து $\cos\theta = \dfrac{OL}{OB}$

$$\Rightarrow \text{OL} = (OB)(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow OL = \left|\vec{b}\right| (\cos\theta) \qquad \ldots (1)$$

வரையறைப்படி $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta$

$$= \left|\vec{a}\right| (OL) \qquad [\because (1)\text{இலிருந்து}]$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left[\vec{a}\text{-இன் மீது } \vec{b}\text{-இன் வீழல்}\right]$$

$$\vec{a}\text{-இன் மீது } \vec{b}\text{-இன் வீழல்} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{b} = \hat{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b}\text{-இன் மீது } \vec{a}\text{-இன் வீழல்} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \vec{a} \cdot \hat{b}$$

2.3.1 திசையிலிப் பெருக்கத்தின் பண்புகள்

***பண்பு* 1 :**

இரண்டு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் பரிமாற்றுப் பண்பை பெற்றுள்ளது.

(i.e.,) ஒவ்வொரு ஜோடி வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ க்கும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

***நிரூபணம்* :**

$\vec{a}, \vec{b}$ என்பன ஏதேனும் இரண்டு வெக்டர்கள் மற்றும் θ என்பது அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம்

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta \qquad \ldots (1)$$

$$\therefore \vec{b} \cdot \vec{a} = \left|\vec{b}\right| \left|\vec{a}\right| \cos\theta$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)-இலிருந்து

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

∴ புள்ளிப் பெருக்கம் பரிமாற்றுப் பண்பை பெற்றுள்ளது.

***பண்பு* 2 : *ஒரே நேர் கோட்டமை வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம்* :**

(i) $\vec{a}, \vec{b}$ என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்து ஒரே திசையில் இருப்பின் θ = 0

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| (1) = ab \qquad \ldots (1)$$

(ii) $\vec{a}, \vec{b}$ என்பன ஒரே கோட்டில் அமைந்து எதிர் திசை பெற்றிருப்பின் θ = π

$$\therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| (\cos\pi) \qquad \ldots (1)$$

$$= \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| (-1) = -ab$$

***பண்பு* 3 : *புள்ளிப் பெருக்கலின் குறி* :**

புள்ளிப் பெருக்கம் $\vec{a} \cdot \vec{b}$ மிகை அல்லது குறை மெய்யெண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ இருக்கலாம்.

(i) இரண்டு வெக்டர்களின் இடைப்பட்ட கோணம் குறுங்கோணம் எனில் (i.e., 0 < θ < 90°) cos θ-இன் மதிப்பு மிகை எண். இந்நிலையில் புள்ளிப் பெருக்கம் ஓர் மிகை எண் ஆகும்.

(ii) இரண்டு வெக்டர்களின் இடைப்பட்ட கோணம் விரிகோணமாக இருப்பின் (i.e., $90 < \theta < 180$) $\cos\theta$-இன் மதிப்பு ஒரு குறை எண். இந்நிலையில் புள்ளிப் பெருக்கம் ஓர் குறை எண் ஆகும்.

(iii) இரண்டு வெக்டர்களின் இடைப்பட்ட கோணம் $90°$ எனில் (i.e., $\theta = 90°$) $\cos\theta = \cos 90° = 0$. இந்நிலையில் புள்ளிப் பெருக்கம் மதிப்பு பூச்சியம் ஆகும்.

குறிப்பு : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ எனில் பின்வரும் மூன்று நிலைகளை அடைகின்றோம்.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = 0$

(i) $\left|\vec{a}\right| = 0$ (i.e.,) $\vec{a}$ ஓர் பூச்சிய வெக்டர் மற்றும் $\vec{b}$ ஏதேனும் ஓர் வெக்டர்.

(ii) $\left|\vec{b}\right| = 0$ (i.e.,) $\vec{b}$ ஓர் பூச்சிய வெக்டர் மற்றும் $\vec{a}$ ஏதேனும் ஓர் வெக்டர்.

(iii) $\cos\theta = 0$ (i.e.,) $\theta = 90°$ (i.e.,) $\vec{a}$ ம் $\vec{b}$ ம் செங்குத்து வெக்டர்கள்.

முக்கிய முடிவு :

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன இரண்டு பூச்சியமில்லா வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

பண்பு 4 : இரண்டு சம வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கம் :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{a}\right| \cos 0 = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$$

மரபு :

$$\left(\vec{a}\right)^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^2 = a^2$$

பண்பு 5 :

(i) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

(ii) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \left|\vec{i}\right| \left|\vec{i}\right| \cos 0 = (1)\,(1)\,(1) = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \left|\vec{i}\right| \left|\vec{j}\right| \cos 90 = (1)\,(1)\,(0) = 0$$

பண்பு 6 : $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன இரண்டு வெக்டர்கள் மற்றும் m என்பது ஏதேனும் ஓர் திசையிலியாயின் $\left(m\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = m\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(m\vec{b}\right)$

பண்பு 7 :

m, n என்பன ஏதேனும் இரண்டு திசையிலிகள் மற்றும் $\vec{a}, \vec{b}$ என்பன இரண்டு வெக்டர்கள் எனில்

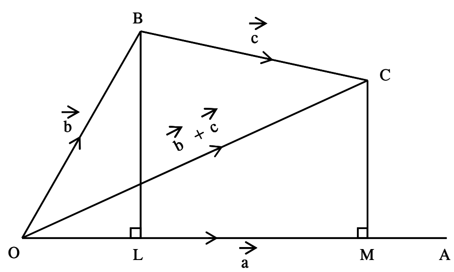
$$m\vec{a} \,.\, n\vec{b} = mn\left(\vec{a} \,.\, \vec{b}\right) = \left(mn\vec{a}\right) . \,\vec{b} = \vec{a} \,.\, \left(mn\vec{b}\right)$$

பண்பு 8 :

திசையிலிப் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து பங்கீட்டுப் பண்பை பெற்றுள்ளது.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} \,.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{a} \,.\, \vec{c}$

நிரூபணம் :



படம் 2.4

$\vec{OA} = \vec{a}$

$\vec{OB} = \vec{b}$

$\vec{BC} = \vec{c}$ என்க

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

$= \vec{b} + \vec{c}$

BL $\perp$ OA மற்றும் $CM \perp OA$ வரைக.

$$\therefore\ OL = \vec{a}\text{-இன் மீது } \vec{b} \text{ வீழல்}$$

$$LM = \vec{a}\text{-இன் மீது } \vec{c} \text{ வீழல்}$$

$$OM = \vec{a}\text{-இன் மீது } \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \text{ வீழல்}$$

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left(\vec{a}\text{-இன் மீது } \vec{b} \text{ வீழல்}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \,.\, \vec{b} = \left|\vec{a}\right| (OL) \qquad \ldots (1)$$

மேலும்

$$\vec{a} \,.\, \vec{c} = \left|\vec{a}\right| \left(\vec{a}\text{-இன் மீது } \vec{c} \text{ வீழல்}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \,.\, \vec{c} = \left|\vec{a}\right| (LM) \qquad \ldots (2)$$

$$\vec{a} \,.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left|\vec{a}\right| \left(\vec{a}\text{-இன் மீது } \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \text{ வீழல்}\right)$$

$$= \left|\vec{a}\right| (OM) = \left|\vec{a}\right| (OL + LM)$$

$$= \left|\vec{a}\right| (OL) + \left|\vec{a}\right| (LM)$$

$$= \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{a} \,.\, \vec{c}$$ [(1) மற்றும் (2)-இன் படி]

எனவே $\vec{a} \,.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{a} \,.\, \vec{c}$

கிளைத் தேற்றம் : $\vec{a} \,.\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \,.\, \vec{b} - \vec{a} \,.\, \vec{c}$

***பண்பு* 9 :** (i) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ எனும் ஏதேனும் இரு வெக்டர்களுக்கு

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}\right)^2 + 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + \left(\vec{b}\right)^2 = a^2 + 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + b^2$$

***நிரூபணம்* :** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) . \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

$$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$ (பங்கீட்டுப் பண்பு)

$$= \left(\vec{a}\right)^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b} + \left(\vec{b}\right)^2 \quad \left(\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}\right)$$

$$= \left(\vec{a}\right)^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \left(\vec{b}\right)^2 = a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$$

இதே போல்

(ii) $$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}\right)^2 - 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + \left(\vec{b}\right)^2 = a^2 - 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + b^2$$

(iii) $$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) . \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \left(\vec{a}\right)^2 - \left(\vec{b}\right)^2 = a^2 - b^2$$

***நிரூபணம்* :** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) . \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a} \,.\, \vec{a} - \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{b} \,.\, \vec{a} - \vec{b} \,.\, \vec{b}$

$$= \left(\vec{a}\right)^2 - \left(\vec{b}\right)^2 = a^2 - b^2$$

***பண்பு* 10 : *கூறுகளின் வாயிலாக திசையிலிப் பெருக்கம்* :**

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ $\quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ என்க

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) . \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right)$$

$$= a_1b_1\left(\vec{i}.\vec{i}\right) + a_1b_2\left(\vec{i}.\vec{j}\right) + a_1b_3\left(\vec{i}.\vec{k}\right) + a_2b_1\left(\vec{j}.\vec{i}\right) + a_2b_2\left(\vec{j}.\vec{j}\right) + a_2b_3\left(\vec{j}.\vec{k}\right) + a_3b_1\left(\vec{k}.\vec{i}\right) + a_3b_2\left(\vec{k}.\vec{j}\right) + a_3b_3\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$$

$$= a_1b_1(1) + a_1b_2(0) + a_1b_3(0) + a_2b_1(0) + a_2b_2(1) + a_2b_3(0) + a_3b_1(0) + a_3b_2(0) + a_3b_3(1)$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

இவ்வாறாக இரு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கலானது அவற்றின் ஒத்த கூறுகளின் பெருக்கல்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

பண்பு 11 : இரு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் :

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

இவ்வாறாயின் $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$$

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

எனில், $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \;;\; |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left[\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right]$$

பண்பு 12 : ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$க்கு

$$|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{(முக்கோண சமநிலி)}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

$$\le |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \qquad [\because \cos\theta \le 1]$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 \le \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

எடுத்துக்காட்டு 2.1 : *பின்வருபவைக்கு* $\vec{a}\,.\,\vec{b}$*-ஐக் காண்க.*

(i) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ *மற்றும்* $\vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$

(ii) $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$ *மற்றும்* $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$

(iii) $\vec{a} = \vec{j} - 2\vec{k}$ *மற்றும்* $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

தீர்வு :

(i) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right).\left(4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}\right)$

$= (1)(4) + (-2)(-4) + (1)(7) = 19$

(ii) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left(\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(2\vec{i} + \vec{k}\right) = (0)(2) + (1)(0) + (2)(1) = 2$

(iii) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left(\vec{j} - 2\vec{k}\right).\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

$= (0)(2) + (1)(3) + (-2)(-2) = 7$

எடுத்துக்காட்டு 2.2 : m*-இன் எம்மதிப்புக்கு* $\vec{a}$ *மற்றும்* $\vec{b}$ *ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்களாகும் என்பதைக் காண்க.*

(i) $\vec{a} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ *மற்றும்* $\vec{b} = 4\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}$

(ii) $\vec{a} = 5\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}$ *மற்றும்* $\vec{b} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

தீர்வு : (i) $\vec{a} \perp \vec{b}$ *தரப்பட்டுள்ளது*

$\therefore\ \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0 \Rightarrow \left(m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right).\left(4\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}\right) = 0$

$\Rightarrow\ 4m - 18 + 2 = 0 \ \Rightarrow\ m = 4$

(ii) $\left(5\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right) = 0$

$\Rightarrow\ 5m - 18 + 2 = 0 \ \Rightarrow\ m = \frac{16}{5}$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 : $\vec{a}$ *மற்றும்* $\vec{b}$ *ஆகிய இரு வெக்டர்கள்* $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$ *மற்றும்* $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 6$ *எனுமாறு இருப்பின்* $\vec{a}$*க்கும்* $\vec{b}$*க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.*

தீர்வு : $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{6}{(4)\ (3)} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 2.4 : $3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$ மற்றும் $4\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$,

'θ' என்பது இவற்றிற்கு இடைபபட்ட கோணம் என்க.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 2 - 48 = -34$$

$$|\vec{a}| = 7, \ |\vec{b}| = 9$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-34}{7 \times 9}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{34}{63}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5 : $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$

இங்கு $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ மற்றும் $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$

தீர்வு :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{j} - \vec{k})}{|\vec{i} - \vec{j}| \ |\vec{j} - \vec{k}|}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{(1)(0) + (-1)(1) + (0)(-1)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6 : ஏதேனும் ஓர் வெக்டர் $\vec{r}$ க்கு

$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{i})\,\vec{i} + (\vec{r} \cdot \vec{j})\,\vec{j} + (\vec{r} \cdot \vec{k})\,\vec{k}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்பது ஏதேனும் ஓர் வெக்டர் என்க.

$$\vec{r} \cdot \vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{i} = x$$

$$\vec{r} \cdot \vec{j} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{j} = y$$

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{k} = z$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{i})\,\vec{i} + (\vec{r} \cdot \vec{j})\,\vec{j} + (\vec{r} \cdot \vec{k})\,\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.7 : $2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$ *என்ற வெக்டாின் மீது*

$7\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ *என்ற வெக்டாின் வீழல் காண்க.*

தீர்வு : $\vec{a} = 7\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$ *என்க.*

$\vec{b}$ *மீது* $\vec{a}$-*இன் வீழல்* $= \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{\left(7\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}\right).\left(2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}\right)}{\left|2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}\right|}$

$$= \frac{14 + 6 - 12}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{8}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8 : $\vec{a}, \vec{b}$ *என்பன ஏதேனும் இரண்டு வெக்டர்கள் எனில்*

$\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = 2\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right)$ *எனக் காட்டுக.*

தீர்வு : $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b}$ … (1)

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\,.\,\vec{b}$ … (2)

(1), (2)*ஐ கூட்டுக*

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\,.\,\vec{b}$$

$$= 2\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{b}\right|^2 = 2\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.9 : $\hat{a}, \hat{b}$ *என்பன இரு அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம்* θ *எனில்* $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left|\hat{a} - \hat{b}\right|$ *என நிரூபி.*

தீர்வு : $\left|\hat{a} - \hat{b}\right|^2 = \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{a}\,.\,\hat{b} = 1 + 1 - 2\left|\hat{a}\right|\left|\hat{b}\right|\cos\theta$

$$= 2 - 2\cos\theta = 2(1 - \cos\theta) = 2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \left|\hat{a} - \hat{b}\right| = 2\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left|\hat{a} - \hat{b}\right|$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10 : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ *மற்றும்* $|\vec{c}| = 7$, *எனில்,* $\vec{a}$ *க்கும்* $\vec{b}$ *க்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.*

தீர்வு :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(-\vec{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\vec{a}\right)^2 + \left(\vec{b}\right)^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left(\vec{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow 3^2 + 5^2 + 2(3)(5)\cos\theta = 7^2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11 : $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $-3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ *என்ற வெக்டர்கள் ஓர் செங்காண முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக அமையும் என நிரூபி.*

தீர்வு : $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{c} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ *என்க.*

இங்கு $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ *என காணலாம்.*

$\therefore$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *ஓர் முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது.*

மேலும் $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right).\left(\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}\right)$

$$= 2 + 3 - 5 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\therefore$ *இவ்வெக்டர்கள் ஓர் செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன.*

பயிற்சி 2.1

(1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ *எனில்* $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ *-ஐக் காண்க.*

(2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ *எனில்* $\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right).\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ *-ஐக் காண்க.*

(3) $2\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ *என்பன செங்குத்து வெக்டர்கள் எனில்* λ*-இன் மதிப்பு காண்க.*

(4) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + m\vec{j} + 3\vec{k}$ என்பன

(i) செங்குத்து வெக்டர்கள்

(ii) இணை வெக்டர்கள் எனில் m-இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(5) $\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\ \vec{k}$ என்ற வெக்டர் ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்களைக் காண்க.

(6) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ என்ற வெக்டர் ஆய அச்சுக்களில் சம கோணத்தை ஏற்படுத்தும் எனக் காட்டு.

(7) $\hat{a}$, $\hat{b}$ என்பன இரு அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

(i) $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left|\hat{a} + \hat{b}\right|$ (ii) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\left|\hat{a} - \hat{b}\right|}{\left|\hat{a} + \hat{b}\right|}$ என நிரூபி.

(8) இரண்டு அலகு வெக்டர்களின் கூடுதல் ஓர் அலகு வெக்டர் எனில் அவற்றின் வித்தியாசத்தின் எண் அளவு $\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

(9) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அலகு வெக்டர்கள் எனில் $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = \sqrt{3}$ என நிறுவுக.

(10) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 60$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 40$ மற்றும் $\left|\vec{b}\right| = 46$ எனில் $\left|\vec{a}\right|$-ன் மதிப்பு காண்க.

(11) $\vec{u}$, $\vec{v}$ மற்றும் $\vec{w}$ ஆகிய வெக்டர்கள் $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

எனுமாறு உள்ளன. $\left|\vec{u}\right| = 3$, $\left|\vec{v}\right| = 4$ மற்றும் $\left|\vec{w}\right| = 5$ எனில் $\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{w}.\vec{u}$-இன் மதிப்பைக் காண்க.

(12) $3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ என்பவை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக.

(13) $4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j}$ என்ற நிலை வெக்டர்களையுடைய புள்ளிகள் அமைக்கும் முக்கோணம் ஓர் செங்கோண முக்கோணம் எனக் காட்டுக.

(14) (i) z-அச்சின் மீது $\vec{i} - \vec{j}$

(ii) $2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ இன் மீது $\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

(iii) $4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$-இன் மீது $3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

வீழலைக் காண்க.

2.3.2 புள்ளிப் பெருக்கலின் வடிவக் கணிதப் பயன்பாடுகள் (Geometrical Application of dot product) :

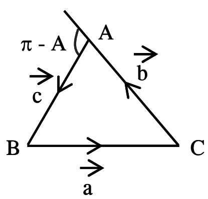
கொசைன் சூத்திரம் (Cosine formulae) :

எடுத்துக்காட்டு 2.12 : வழக்கமான குறியீட்டுகளுடன்

(i) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; (ii) $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$ (iii) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

***தீர்வு* (i) :**

படத்திலிருந்து



படம் 2.5

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = -\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\left(\vec{a}\right)^2 = \left(\vec{b} + \vec{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - A)$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

இதைப்போல் (ii) மற்றும் (iii)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

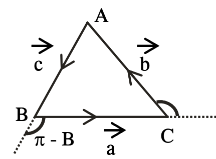
வீழல் சூத்திரம் (Projection Formulae) :

எடுத்துக்காட்டு 2.13 : வழக்கமான குறியீட்டுகளுடன்

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = a\cos C + c\cos A$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$

***தீர்வு* (i) :** படத்திலிருந்து

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$



$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

படம் 2.6

$$a^2 = -ab\cos(\pi - C) - ac\cos(\pi - B)$$

$$a^2 = -ab(-\cos C) - ac(-\cos B)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = ab\cos C + ac\cos B$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = b\cos C + c\cos B}$$

இதைப்போல் (ii) மற்றும் (iii)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

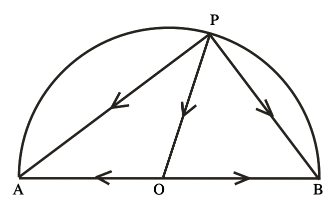
எடுத்துக்காட்டு 2.14 : ஓர் அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் ஒரு செங்கோணம். இதனை வெக்டர் முறையில் நிரூபிக்க.

***தீர்வு* :** *O*-ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டம் *AB* என்க. அரைவட்டத்தின் மீது *P* ஏதேனும் ஓர் புள்ளி என்க.

$\lfloor APB = 90°$ எனக் காட்டவேண்டும்

இங்கு $OA = OB = OP$ (ஆரங்கள்)

$$\vec{PA} = \vec{PO} + \vec{OA}$$



மேலும் $\vec{PB} = \vec{PO} + \vec{OB}$

$$= \vec{PO} - \vec{OA}$$

படம் 2.7

$$\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \left(\vec{PO} + \vec{OA}\right) \cdot \left(\vec{PO} - \vec{OA}\right)$$

$$= \left(\vec{PO}\right)^2 - \left(\vec{OA}\right)^2$$

$$= PO^2 - OA^2 = 0$$

$$\therefore \vec{PA} \perp \vec{PB} \Rightarrow \lfloor APB = \frac{\pi}{2}$$

∴ அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் ஓர் செங்கோணம் ஆகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2.15 : ஓர் சாய் சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு : *ABCD* என்பது ஓர் சாய் சதுரம் என்க.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$ என்க.

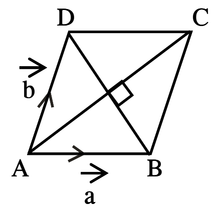
இங்கு $AB = BC = CD = DA$

i.e., $\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right|$ … (1)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

மேலும் $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$



படம் 2.8

$$\therefore \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right).\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\right).\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{b}\right)^2 - \left(\overrightarrow{a}\right)^2 = 0 \quad \left(\because \left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right|\right)$$

மேலும் $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

∴ ஓர் சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2.16 : ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு :

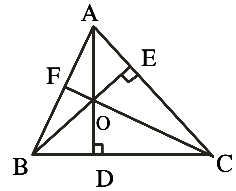
ΔABC-இல் குத்துக்கோடுகள் *AD*, *BE*-யும் *O*-இல் சந்திக்கின்றன. குத்துக்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியேச் செல்லும் என்பதை நிறுவ *CO* ஆனது *AB*-க்கு செங்குத்தாக இருக்கும் எனக் காட்டினால் போதும்.

O-ஐ ஆதியாகக் கொள்க. *A*, *B*, *C*-இன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ என்க.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$

$AD \perp BC$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$$



படம் 2.9

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \left(\vec{c} - \vec{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \ldots(1)$$

$BE \perp CA \Rightarrow \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{b} \cdot \left(\vec{a} - \vec{c}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)ஐக் கூட்ட

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$$

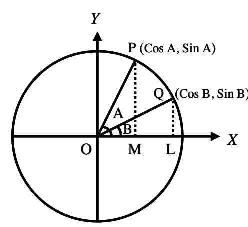
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$$

எனவே மூன்று குத்துக் கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் கோடுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.17 : $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

O-ஐ மையமாகக் கொண்ட அலகு வட்டத்தின் பரிதியில் P, Q என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. OP மற்றும் OQ ஆனவை x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் முறையே A, B என்க.



படம் 2.10

$$\therefore \underline{|POQ} = \underline{|POx} - \underline{|QOx} = A - B$$

P, Q இன் ஆயத் தொலைகள் முறையே $(\cos A, \sin A)$ மற்றும் $(\cos B, \sin B)$.

$\vec{i}, \vec{j}$ என்ற அலகு வெக்டர்களை x, y அச்சுத் திசைகளில் எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \cos A\,\vec{i} + \sin A\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LQ} = \cos B\,\vec{i} + \sin B\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(\cos A\,\vec{i} + \sin A\,\vec{j}\right) \cdot \left(\cos B\,\vec{i} + \sin B\,\vec{j}\right) \quad ..(1)$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

வரையறையின்படி $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left|\overrightarrow{OP}\right| \left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos(A - B) = \cos(A - B)$ .. (2)

(1) மற்றும் (2)-இலிருந்து

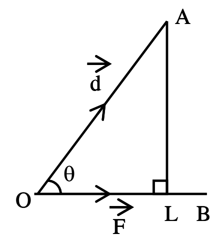
$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

2.3.4 இயற்பியலில் திசையிலிப் பெருக்கத்தின் பயன்பாடுகள்

விசை செய்த வேலை (Work done by force) :

விசை செய்த வேலை ஒரு திசையிலி ஆகும். இது விசையின் எண்ணளவை அவ்விசையின் திசையில் அமைந்த இடப்பெயர்ச்சியின் கூறினால் பெருக்கி கணக்கிடப்படுவது ஆகும்.

ஒரு துகளானது O என்ற புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $\overrightarrow{OB}$என்ற வெக்டரால் குறிக்கப்படும் $\overrightarrow{F}$ என்ற விசையானது அத்துகளின் மீது Oவில் செயல்படுகிறது. இவ்விசையின் செயல்பாட்டினால் அத்துகளானது $\overrightarrow{OA}$-இன் திசைக்கு நகர்த்தப்படுகின்றது.



படம் 2.11

$\overrightarrow{OA}$ ஆனது இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரைத் தரும். மேலும் OL ஆனது $\overrightarrow{F}$-இன் திசையில் துகளின் இடப்பெயர்ச்சி தரும் செங்கோண $\Delta\, OLA$-இல்

$$OL = OA \cos\theta \quad = \left|\overrightarrow{d}\right| \cos\theta \quad \begin{cases}\theta \text{ என்பது } \overrightarrow{F} \text{ க்கும் } \overrightarrow{d} \text{ க்கும்} \\ \text{இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும்}\end{cases}$$

விசை செய்த வேலை = (விசையின் எண்ணளவு)
(விசையின் திசையில் இடப்பெயர்ச்சி)

$$= \left|\overrightarrow{F}\right| OL = \left|\overrightarrow{F}\right| \left|\overrightarrow{d}\right| \cos\theta$$

விசை செய்த வேலை = $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d}$

குறிப்பு :

ஒரு துகளின் மீது பல்வேறு விசைகள் செயல்படும்போது தனித்தனி விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் கூடுதலானது விளைவு விசை செய்யும் வேலைக்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.18 : ஒரு துகள் A என்ற புள்ளியிலிருந்து B என்ற புள்ளிக்கு $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ என்ற விசையின் செயல்பாட்டினால் நகர்த்தப் பெற்றால் அவ்விசை செய்யும் வேலையளவைக் காண்க. இங்கு A-இன் நிலை வெக்டர் $2\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$ மற்றும் B-இன் நிலை வெக்டர் $3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ எனக் கொள்க.

தீர்வு :

$$\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \;\; ; \;\; \vec{OA} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k} \; ; \vec{OB} = 3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{d} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} - 12\vec{k}$$

விசை செய்யும் வேலை $= \vec{F} \cdot \vec{d}$

$$= \left(\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) \cdot \left(\vec{i} + 5\vec{j} - 12\vec{k}\right)$$

$$= (1)\,(1) + 3(5) + 12 = 28$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19 : ஒரு விசை $\vec{F} = a\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$-இன் செயல்பாட்டினால் ஒரு புள்ளியானது (1, 1, 1) எனும் நிலையிலிருந்து (2, 2, 2) எனும் நிலைக்கு ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே நகர்த்தப்படும்போது செய்த வேலை 5 அலகுகள் எனில் a-இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{F} = a\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

விசை செய்யும் வேலை = 5 அலகுகள்

$$\vec{d} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

விசை செய்யும் வேலை $= \vec{F} \cdot \vec{d}$

$$5 = \left(a\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$5 = a + 1 + 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

பயிற்சி 2.2

வெக்டர் முறையில் நிறுவுக **:**

(1) ஒரு இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் சமம் எனில் அந்த இணைகரம் ஓர் செவ்வகம் என நிறுவுக.

(2) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளி அதன் உச்சிகளில் இருந்து சம தொலைவில் இருக்கும்.

(3) ஓர் இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

(4) $\cos(A + B) = \cos A \, \cos B - \sin A \, \sin B$

(5) ஒரு துகள் $2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ எனும் நிலையில் இருந்து $3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ எனும் நிலைக்கு ஒரு விசை $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$-ஆல் நகர்த்தப்பட்டால் அவ்விசை செய்த வேலையை கணக்கிடு.

(6) $2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ எனும் வெக்டருக்கு இணையானதும் எண்ணளவு 5 உடையதுமான விசை ஒரு துகளை (1, 2, 3) என்ற புள்ளியில் இருந்து (5, 3, 7) என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்துமாயின் அவ்விசை செய்யும் வேலையைக் கணக்கிடுக.

(7) ஒரு துகள் $4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ எனும் நிலையிலிருந்து $6\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ எனும் நிலைக்கு $2\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + 7\vec{j}$ என்ற மாறாத விசைகளின் செயல்பாட்டினால் நகர்த்தப்பெற்றால் அவ்விசைகள் சேர்ந்து செய்யும் வேலையைக் காண்க.

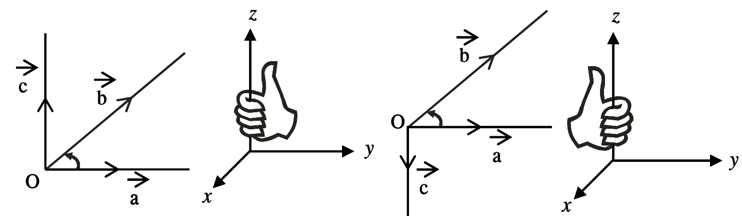
(8) 3 மற்றும் 4 அலகுகள் எண்ணளவு உள்ள முறையே $6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ என்ற திசைகளில் அமைந்த விசைகள் ஒரு துகளை (2, 2, – 1) என்ற நிலையில் இருந்து (4, 3, 1) என்ற நிலைக்கு நகர்த்தும் போது செய்யப்படும் வேலையைக் கணக்கிடுக.

2.4 வெக்டர் பெருக்கம் (Vector product) *:*

2.4.1 வலக்கை மற்றும் இடக்கை அமைப்பு (Right-handed and left handed systems) :

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பவை ஆதி *O* வழியாகச் செல்லக்கூடிய ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் என்க. இவை ஒருபடிச் சாராதவையாதலால் எந்த இரு வெக்டர்களும் இணைத்திசைகள் பெறாதவையாயும், எல்லா வெக்டர்களுமே ஒரே தளத்தில் அமையாததாயும் இருக்கும். $\vec{a}$க்கும் $\vec{b}$க்கும் இடைப்பட்ட சிறிய கோணம் θ என்க. (i.e. $0 < \theta < \pi$) ஆதி *O*-ஐ எப்பொழுதும் தனக்கு இடப்புறமாக இருக்குமாறு ஒருவர் $\vec{a}$-இலிருந்து $\vec{b}$-ஐ நோக்கி θ தூரம் நடப்பதாகக் கொள்வோம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ உள்ளடக்கிய தளத்தின் எப்புறத்தில் $\vec{c}$ அமைகிறதோ அந்தப் பக்கத்தில் அந்நபரின் தலைப்பாகம் அமைந்தால், $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ஆனது வலக்கை அமைப்பு கொண்ட வெக்டர்கள் எனப்படும்.

$\vec{c}$ ஆனது எதிர் திசை பெற்றிருப்பின், $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ஆனது இடக்கை அமைப்பு கொண்டவை எனப்படும்.



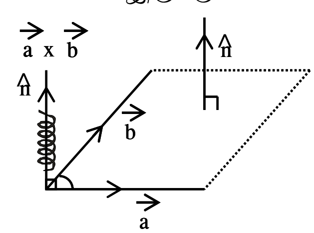
படம் 2. 12

வரையறை : $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலை $\vec{a} \times \vec{b}$ எனக் குறிப்பிடுவர். இதன் எண் அளவு $|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$ ஆகும். இங்கு θ என்பது $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும். $0 \le \theta \le \pi$ மற்றும் $\vec{a} \times \vec{b}$-இன் திசையானது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய இரண்டுக்குமே செங்குத்தானதாக இருக்கும். மேலும் $\vec{a}$, $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a} \times \vec{b}$ ஆகிய மூன்று வெக்டர்களும் வலக்கை அமைப்பை கொண்டவையாக இருக்கும்.

வேறுவிதமாகச் சொல்வோமாயின்,

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n},$$

θ என்பது $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் மற்றும் $\hat{n}$ என்பது $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டர்.



படம் 2.13

மேலும் $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\hat{n}$ என்பன வலக்கை அமைப்பை உடைய வெக்டர்கள்.

குறிப்பு :

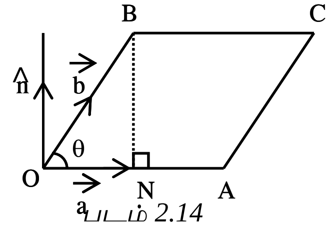
(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\hat{n}$ என்பன வலக்கை அமைப்பை பெற்றுள்ளது என்பதன் பொருளானது $\vec{a}$-இலிருந்து $\vec{b}$-ஐ நோக்கி ஒரு வலக்கை திருகாணியை சுழற்றுவோமாயின் அத்திருகாணி முன்னேறும் திசை $\hat{n}$-இன் திசையில் அமையும் என்பதாகும். $\hat{n}$ ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$-ஐ உள்ளடக்கிய தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் இருக்கும்.

(2) $\vec{a}$-க்கும் $\vec{b}$-க்கும் இடையில் குறுக்கு குறி இருப்பதால் $\vec{a} \times \vec{b}$-ஐ இரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கம் என அழைக்கலாம்.

2.4.2 வெக்டர் குறுக்கு பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation of Vector product) :

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ என்க.

θ என்பது $\vec{a}$-க்கும் $\vec{b}$-க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் என்க. $\vec{OA}, \vec{OB}$ வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட $OACB$ என்ற இணைகரத்தை வரைக.



படம் 2.14

செங்கோண முக்கோணம் ONBஇல்

$BN = |\vec{b}| \sin\theta$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$$

$= (OA)\ (BN)$

$=$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம்

$= OACB$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பு

$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \Big\{$ $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$-ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு

மேலும், ΔOABஇன் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ $OACB$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{OA} \times \vec{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

ΔOABஇன் வெக்டர் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

சில முக்கிய முடிவுகள் :

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$-ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$-ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் வெக்டர் பரப்பு $\vec{a} \times \vec{b}$

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$-ஐப் பக்கங்களாகக் கொண்ட Δத்தின் பரப்பு = $\frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

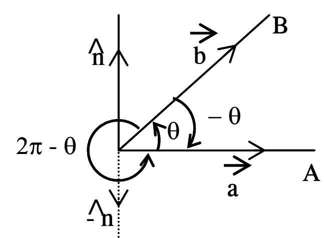
(4) ΔABC-இன் பரப்பு = $\frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$ (அல்லது) $\frac{1}{2}\left|\vec{BC} \times \vec{BA}\right|$ (அல்லது) $\frac{1}{2}\left|\vec{CA} \times \vec{CB}\right|$

2.4.3 வெக்டர் பெருக்கத்தின் பண்புகள் :

பண்பு (1) : வெக்டர் பெருக்கம் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது (Non-Commutativity of Vector product) :

வெக்டர் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்புக்குட்பட்டதன்று (i.e.) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன ஏதேனும் இரண்டு வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. ஆனால் $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரண்டு பூச்சியமற்ற மற்றும் இணையற்ற வெக்டர்கள் என்க. θ என்பது அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,



படம் 2.15

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \ \hat{n},$$

$\hat{n}$என்பது $\vec{a}$, $\vec{b}$க்கும் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டர்.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \left|\vec{b}\right| \left|\vec{a}\right| \sin(\theta)\,(-\hat{n}) = -\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \ \hat{n} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

இங்கு $\vec{b}$, $\vec{a}$, $-\hat{n}$ என்பன வலக்கை அமைப்பை உடைய வெக்டர்கள்.

எனவே $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. ஆனால் $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$

பண்பு (2) :

ஒரே நேர்க்கோட்டமை [இணை] வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் (Vector product of Collinear (Parallel) Vectors) :

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டமை (இணை) வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}$ என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டமை அல்லது இணை வெக்டர்கள் எனில் $\theta = 0, \pi$

$$\theta = 0, \pi \text{ எனில் } \sin\theta = 0$$

$$\text{எனவே } \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n}$$

$$= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,(O)\,\hat{n} = \vec{0}$$

முடிவு :

இரண்டு பூச்சியமற்ற வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் பூச்சியம் எனில் அந்த வெக்டர்கள் இணையானவை (நேர்க்கோட்டமைந்தவை). இதன் மறுதலையும் உண்மை.

i.e., $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{a}$ இணை $\vec{b}$, மற்றும் $\vec{a}, \vec{b}$ என்பன இரண்டு பூச்சியமற்ற வெக்டர்கள்.

நிரூபணம் :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{O} \text{ என எடுத்துக் கொண்டால்}$$

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n} = \vec{O} \quad \text{இங்கு } |\vec{a}| \neq 0 \ \&\ |\vec{b}| \neq 0, \hat{n} \neq \vec{O}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = 0 \text{ or } \pi$$

$\Rightarrow \vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஒரே கோட்டமைந்தவை (இணையானவை)

மறுதலையாக $\vec{a} \parallel \vec{b}$ எனில்

$$\theta = O \text{ அல்லது } \pi$$

$$\Rightarrow \sin\theta = O$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n} = \vec{o}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$$

குறிப்பு : $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$ எனில் பின்வரும் மூன்று நிலைகளை அடைகின்றோம்.

(i) $\vec{a}$ ஓர் பூச்சிய வெக்டர் மற்றும் $\vec{b}$ ஏதேனும் ஓர் வெக்டர்

(ii) $\vec{b}$ ஓர் பூச்சிய வெக்டர் மற்றும் $\vec{a}$ ஏதேனும் ஓர் வெக்டர்

(iii) $\vec{a}$ம் $\vec{b}$ம் இணை வெக்டர்கள் (ஒரே கோட்டமைந்தவை)

பண்பு (3) : இரண்டு சமவெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் (Cross Product of Equal Vectors) :

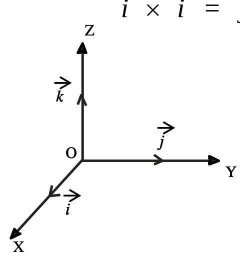
$$\vec{a} \times \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{a}\right| \sin\theta \ \hat{n}$$
$$= \left|\vec{a}\right| \left|\vec{a}\right| (0) \ \hat{n}$$
$$= \vec{o}$$

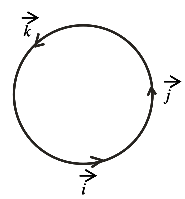
$\therefore$ ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற $\vec{a}$-க்கும் $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$ ஆகும்.

பண்பு (4) : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ என்பன ஓரலகு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் (Cross product of Unit Vectors $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

மேற்குறிப்பிட்ட பண்பின்படி

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{O}$$





படம் 2. 16

மேலும் $\vec{i} \times \vec{j} = \left|\vec{i}\right| \left|\vec{j}\right| \sin 90° \vec{k} = (1)\,(1)\,(1)\,\vec{k} = \vec{k}$

இதேப்போல் $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

மற்றும் $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

பண்பு (5) : m ஓர் திசையிலி மற்றும் $\vec{a}, \vec{b}$ என்பன இரண்டு வெக்டர்கள், இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$$m\vec{a} \times \vec{b} = m\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times m\vec{b}$$

பண்பு (6) : வெக்டர் பெருக்கம் கூட்டலைப் பொறுத்து பங்கீட்டுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது (Distributivity of vector product over vector addition) :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில்

(i) $\vec{a} \times \left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{c}\right)$ (இடது பங்கீடு)

(ii) $\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \times \vec{a} = \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) + \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$ (வலது பங்கீடு)

முடிவு :

***வெக்டர் பெருக்கத்தின் அணிக்கோவை அமைப்பு* (Vector Product in the determinant form) :**

$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ என்க

$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ என்பன இரு வெக்டர்கள் எனில்

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}\right) \times \left(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}\right) \\
&= a_1b_1\left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + a_1b_2\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_1b_3\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) \\
&\quad + a_2b_1\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_2b_2\left(\vec{j} \times \vec{j}\right) + a_2b_3\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) \\
&\quad + a_3b_1\left(\vec{k} \times \vec{i}\right) + a_3b_2\left(\vec{k} \times \vec{j}\right) + a_3b_3\left(\vec{k} \times \vec{k}\right) \\
&= a_1b_2 \vec{k} + a_1b_3\left(-\vec{j}\right) + a_2b_1\left(-\vec{k}\right) + a_2b_3 \vec{i} \\
&\quad + a_3b_1 \vec{j} + a_3b_2\left(-\vec{i}\right) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

***பண்பு* (7) : *இரண்டு வெக்டர்களின் இடைப்பட்ட கோணம்* :**

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன இரண்டு வெக்டர்கள், இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \ \hat{n}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \ \hat{n}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|}\right)$$

***குறிப்பு* :**

இங்கு θ *என்பது குறுங்கோணமாகவே கிடைக்கும். இவ்விதம் நாம் வெக்டர் பெருக்கலைப் பயன்படுத்திக் கோண அளவு கணக்கிட்டால் குறுங்கோணம் மட்டும் கிடைக்கும்.*

ஆகவே கோண அளவு காணும் கணக்குகளில் புள்ளிப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தலே நன்று, அதுவே கோணம் θ *அமைகின்ற நிலையைத் தெளிவாக்கும்.*

***பண்பு* (8) : *கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்களைக் காணல்* (Unit vectors perpendicular to two given vectors) :**

(i.e.) *தரப்பட்ட இரு வெக்டர்களை உள்ளடக்கிய தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டர்.*

$\vec{a}$, $\vec{b}$ *என்பன இரு பூச்சியமற்ற, இணை அல்லாத வெக்டர்கள் என்க, மற்றும் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம்* θ *என்க.*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta\ \hat{n} \qquad \ldots (1)$$

இங்கு $\vec{a}$*-க்கும்* $\vec{b}$*-க்கும் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்* $\hat{n}$ *ஆகும்.*

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \qquad \ldots (2)$$

(1) *மற்றும்* (2)*-இலிருந்து* $\hat{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$

***குறிப்பு* :** $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$ *என்பதும்* $\vec{a}$ *க்கும்* $\vec{b}$ *க்கும் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டர் ஆகும்.*

எனவே, $\vec{a}$, $\vec{b}$ *க்கு செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டர்களானவை*

$$\pm \hat{n} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

எண் அளவு μ உடையதும் $\vec{a}$, $\vec{b}$-ஐ உள்ளடக்கிய தளத்திற்குச் செங்குத்தானதுமான வெக்டர் $\pm \frac{\mu\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$

எடுத்துக்காட்டு 2.20 :

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன இரண்டு வெக்டர்கள் எனில்

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 + \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2$$

தீர்வு :

$\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \ \hat{n}$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \sin^2\theta$$

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 + \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21 : $4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $-2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ எனும் வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தானதும் எண் அளவு 6 உடையதுமான வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \ ; \ \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \text{ என்க}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3$$

தேவையான வெக்டர்கள் $= 6\left[\pm\left(\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\right)\right]$

$$= \pm\left(-2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.22 : $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ *மற்றும்* $\vec{a}.\vec{b} = 60$ எனில் $|\vec{a}\times\vec{b}|$ *காண்க.*

தீர்வு :

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\,.\,\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\,.\,\vec{b})^2$$

$$= (13)^2\,(5)^2 - (60)^2 = 625$$

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = 25$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23 : $\mathbf{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ *மற்றும்* $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ *எனும் வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை வெக்டர் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.*

தீர்வு :

$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ என்க

$\vec{a}, \vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \ \sin\theta = \left(\frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}\ \sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24 : $\vec{p} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{q} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ எனில் $\vec{p} \times \vec{q}$ கணக்கிட்டு $\vec{p}$ ம் $\vec{p} \times \vec{q}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனவும் $\vec{q}$ ம் $\vec{p} \times \vec{q}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனவும் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\vec{i} - 51\vec{j} - 30\vec{k}$$

இங்கு $\vec{p} \cdot \left(\vec{p} \times \vec{q}\right) = \left(-3\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}\right) \cdot \left(2\vec{i} - 51\vec{j} - 30\vec{k}\right)$

$$= -6 - 204 + 210 = 0$$

$\vec{p}$ ம் $\vec{p} \times \vec{q}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகிறது.

இங்கு $\vec{q} \cdot \left(\vec{p} \times \vec{q}\right) = \left(6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right) \cdot \left(2\vec{i} - 51\vec{j} - 30\vec{k}\right)$

$$= 12 - 102 + 90 = 0$$

$\vec{q}$ ம் $\vec{p} \times \vec{q}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.25 : $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ மற்றும் $7\left(\vec{i} + \vec{k}\right)$ என்ற நிலை வெக்டர்களையுடைய புள்ளிகள் முறையே *A*, *B*, *C* எனில் $\vec{AB} \times \vec{AC}$ காண்க.

தீர்வு : $\vec{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{OB} = 4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{OC} = 7\vec{i} + 7\vec{k}$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \left(4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}\right) - \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$\vec{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{AB}$, $\vec{AC}$ வெக்டர்கள் இணையானவை மற்றும் இவற்றிற்கு ஒரு பொது புள்ளி A உள்ளது.

$\therefore$ $\vec{AB}$ம் $\vec{AC}$ம் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

$\therefore$ A, B, C ஒரே கோட்டமைந்த புள்ளிகள்.

பயிற்சி 2.3

(1) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ எனில் $\vec{a} \times \vec{b}$-இன் எண்ணளவு காண்க.

(2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$ எனில் $|\vec{a} \times \vec{b}|$

(3) $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களைக் கொண்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

(4) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ க்கு செங்குத்தானதாகவும் எண் அளவு 5 உடையதுமான வெக்டரைக் கணக்கிடுக.

(5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ எனில், $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(6) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ மற்றும் $\vec{a} \times \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ எனில் $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(7) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{k}$ எனில் $\vec{a} \times \vec{b}$ காண்க, மற்றும் $\vec{a}$-ம் $\vec{b}$-ம் $\vec{a} \times \vec{b}$-க்கு தனித்தனியாக செங்குத்தா எனச் சோதிக்க.

(8) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில்

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} + \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{0}$$

(9) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஓர் அலகு வெக்டர்கள்.

மேலும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ மற்றும் $\vec{b}$-க்கும் $\vec{c}$-க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{6}$ எனில் $\vec{a} = \pm 2\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ எனக் காட்டு.

(10) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$, $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ எனில் $\vec{a} - \vec{d}$ மற்றும் $\vec{b} - \vec{c}$ இணை வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

2.4.4 வெக்டர் பெருக்கத்தின் வடிவக் கணிதப் பயன்பாடுகள் (Geometrical applications of cross product) :

எடுத்துக்காட்டு 2.26 : *AC மற்றும் BD-ஐ மூலைவிட்டங்களாகக் கொண்ட நாற்கரம் ABCD-இன் பரப்பு* $\frac{1}{2}\left|\vec{AC} \times \vec{BD}\right|$ *எனக் காட்டுக.*

தீர்வு :

$$\left.\begin{array}{r}\text{நாற்கரம் } ABCD\text{-இன்}\\ \text{வெக்டர் பரப்பு}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\Delta ABC\text{-இன் வெக்டர் பரப்பு} +\\ \Delta ACD\text{-இன் வெக்டர் பரப்பு}\end{array}\right.$$

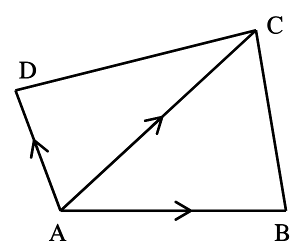
$$= \frac{1}{2}\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{AC} \times \vec{AD}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\vec{AC} \times \vec{AB}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{AC} \times \vec{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} \times \left(-\vec{AB} + \vec{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} \times \left(\vec{BA} + \vec{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} \times \vec{BD}$$



படம் 2.17

$\therefore$ நாற்கரம் $ABCD$-இன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left|\vec{AC} \times \vec{BD}\right|$

இதனின்றும் :

$\vec{d}_1, \vec{d}_2$-ஐ மூலைவிட்டங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right|$ எனத் தருவிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.27 :

முக்கோணம் ABC-இன் உச்சிகளான A, B, C-யின் நிலைவெக்டர்கள் $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *எனில், முக்கோணம் ABC-இன் பரப்பானது* $\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|$ *என நிறுவுக. இதனின்றும்* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *ஒரே நேர்க்கோட்டமை வெக்டர்களாயிருக்க நிபந்தனையைக் காண்க.*

தீர்வு : Δ *ABC-இன் பரப்பு* $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$$

எனவே, ΔABC*-இன் பரப்பு* $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{a}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{a}\right|$$

ΔABC*-இன் பரப்பு* $= \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}\right|$

A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டமைவனவாயின், ΔABC*-இன் பரப்பு* = 0 *ஆகும்.*

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}\right| = 0$$

(*அல்லது*) $\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}$

எனவே, $\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}$ *என்பது தேவையான நிபந்தனையாகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 2.28 : *வழக்கமான குறியீட்டுகளுடன்* $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ *என்க.*

முக்கோணத்திற்குரிய பரப்பு பண்பின்படி,

$$\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

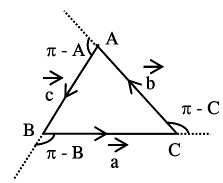
$$\Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

$ab\sin(\pi - C) = bc\sin(\pi - A) = ca\sin(\pi - B)$

$\Rightarrow ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$

abc-ஆல் வகுக்க

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$



படம் 2.18

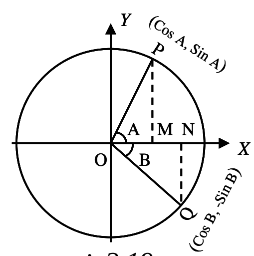
தலைகீழ் காண $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

எடுத்துக்காட்டு 2.29 : $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

O-ஐ மையமாய்க் கொண்ட அலகுவட்டத்தின் மீது P மற்றும் Q என்பவை ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் என்க. x-அச்சுடன் OP மற்றும் OQ என்பவை ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே A, Bஎன்க.

$\therefore \underline{\lfloor POQ} = \underline{\lfloor POx} + \underline{\lfloor QOx} = A + B$



படம் 2.19

P மற்றும் Q-இன் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே $(\cos A, \sin A)$ மற்றும் $(\cos B, -\sin B)$ ஆகும். x மற்றும் y அச்சுக்களின் வழியே முறையே $\vec{i}$ மற்றும் $\vec{j}$ என்கிற அலகு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்க.

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \cos A\,\vec{i} + \sin A\,\vec{j}$$

$$\vec{OQ} = \vec{ON} + \vec{NQ} = \cos B\,\vec{i} + \sin B\left(-\vec{j}\right) \quad \because \left|\vec{NQ}\right| = \sin B$$

$$= \cos B\,\vec{i} - \sin B\,\vec{j}$$

$$\vec{OQ}\times\vec{OP} = \left|\vec{OQ}\right|\left|\vec{OP}\right|\sin(A + B)\,\vec{k} = \sin(A + B)\,\vec{k} \qquad \ldots (1)$$

$$\vec{OQ}\times\vec{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos B & -\sin B & 0 \\ \cos A & \sin A & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\,[\sin A\cos B + \cos A\sin B] \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)–இலிருந்து

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

எடுத்துக்காட்டு 2.30 : $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ மற்றும் $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகியவற்றை மூலை விட்டங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு $5\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\vec{d}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{மற்றும்} \quad \vec{d}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$\vec{d}_1$ மற்றும் $\vec{d}_2$-ஐ மூலை விட்டங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right|$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 14\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$$

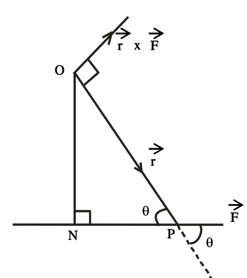
$$= \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

இணைகரத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right| = \frac{1}{2} 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ச.அ.

2.4.5 இயற்பியலில் வெக்டர் பெருக்கத்தின் பயன்பாடுகள் :

ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன்
(Moment of a force about a point) :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P-இல் $\vec{F}$ என்கிற விசை செலுத்தப்படுவதாகக் கொள்வோம். O என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து $\vec{F}$ இன் திருப்புத் திறனானது பொருளை O-ஐப் பொறுத்து திருப்புகின்ற இயல்பின் அளவாகும். இவ்வியல்பானது O-ஐப் பொறுத்து இடஞ்சுழித் திசையிலிருப்பின் திருப்புத் திறனை மிகையாகவும், அவ்வாறு இல்லையாயின் குறையாகவும் கருதுவர்.



படம் 2.20

$\vec{F}$ என்ற விசையின் மீது P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. O-ஐப் பொறுத்த P-இன் நிலைவெக்டர் $\vec{r}$ என்க. O-ஐப் பொறுத்த $\vec{F}$-இன் திருப்புத் திறன் எண்ணளவானது, $\vec{F}$-இன் எண்ணளவு மற்றும் O-இலிருந்து $\vec{F}$ செயற்படும் நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம் ஆகியவற்றின் பெருக்கலாகும்.

$\therefore$ திருப்புத்திறனின் எண்ணளவு $= \left|\vec{F}\right| (ON)$

செங்கோண முக்கோணம் ONP-இல்

$$\sin\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{ON}{\left|\vec{r}\right|}$$

$$\left|\vec{r}\right| \sin\theta = ON$$

$\therefore$ திருப்புத்திறனின் எண்ணளவு $= \left|\vec{F}\right| (ON)$

$$= \left|\vec{r}\right| \left|\vec{F}\right| \sin\theta$$

$$= \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$$

எனவே O-ஐப் பொறுத்த $\vec{F}$-இன் திருப்புத்திறன் (அல்லது) முறுக்குத்திறன் (Torque) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ என்ற வெக்டரால் வரையறுக்கப்படும்.

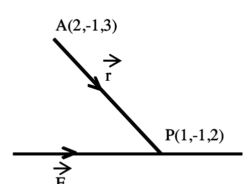
எடுத்துக்காட்டு 2.31 : $3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ என்ற வெக்டரால் தரப்படும் விசையானது $(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் செலுத்தப்படுகிறது. $(2, -1, 3)$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{OP} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$



படம் 2.21

$$\vec{r} = \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$$= \left(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$\vec{r} = -\vec{i} - \vec{k}$$

A என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து $\vec{F}$ என்ற விசையின் திருப்புத்திறன் $\vec{M}$ ஆனது

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}$$

பயிற்சி 2.4

(1) $A(-5, 2, 5)$, $B(-3, 6, 7)$, $C(4, -1, 5)$ மற்றும் $D(2, -5, 3)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு காண்க.

(2) $2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ ஆகியவற்றை மூலைவிட்டங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு காண்க.

(3) $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $-3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ஆகியவற்றை பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு காண்க.

(4) $(3, -1, 2)$, $(1, -1, -3)$ மற்றும் $(4, -3, 1)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாய்க் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

(5) ஒரே அடிப்பக்கமும், ஒரே இணை நேர்க்கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட இணைகரங்கள் சமபரப்புடையவை என்பதை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(6) ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களை அடுத்துள்ள பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பானது முந்தைய இணைகரத்தின் பரப்பு போல் இருமடங்கு என நிறுவுக.

(7) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ என வெக்டர் முறையில் நிரூபி.

(8) $4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ என்ற புள்ளியை நிலை வெக்டராய்க் கொண்ட புள்ளி Pஇல் செயல்படும் விசைகள் $2\vec{i} + 7\vec{j}$, $2\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$ மற்றும் $-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ஆகும். இவைகளின் விளைவு விசையின் திருப்புத் திறனை $6\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$-ஐ நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளியைப் பொறுத்துக் காண்க.

(9) $B(5, 2, 4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செயல்படும் விசை $4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$-இன் வெக்டர் திருப்புத் திறன் $A(3, -1, 3)$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து $\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$ எனக் காட்டுக.

(10) $2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ எனும் விசை ஆதிவழியாகச் செயல்படுகிறது எனில் $(1, -2, 3)$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து அதன் திருப்புத்திறனின் எண்ணளவு மற்றும் திசைக் கொசைன்கள் இவற்றைக் காண்க.

2.5 மூன்று வெக்டர்களின் பெருக்கம் (Product of three vectors):

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பவை எவையேனும் மூன்று வெக்டர்கள் என்க.

$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$, $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ மற்றும் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ எடுத்துக் கொள்க.

இங்கு $\vec{a} \cdot \vec{b}$ என்பது ஒரு திசையிலி. ஒரு வெக்டர் மற்றும் திசையிலியின் புள்ளிப் பெருக்கம் பற்றி வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ என்பது பொருளற்றதாகும்.

இதைப்போல் $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c}$ பொருளற்றது. ஆனால் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ என்பது பொருள் உடையது. காரணம் $\vec{a} \times \vec{b}$ ஒரு வெக்டர் மற்றும் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ என்பது $\vec{a} \times \vec{b}$க்கும் $\vec{c}$க்கும் புள்ளிப் பெருக்கம் எடுப்பதாகும்.

இதேப் போல் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ பொருள் உடையது.

2.5.1 திசையிலி முப்பெருக்கம் (Scalar Triple Product) :

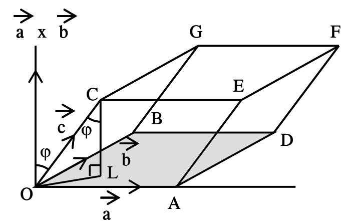
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பது மூன்று வெக்டர்கள் எனில் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ என்பது திசையிலி முப்பெருக்கம் ஆகும்.

திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம் :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பவை ஒரே தளத்தில் அமையாத மூன்று வெக்டர்கள் என்க. *OA, OB, OC*-ஐ விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத்திண்மத்தில் $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ மற்றும் $\vec{OC} = \vec{c}$ ஆகும்.

$\vec{a} \times \vec{b}$ என்ற வெக்டர் $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்கள் இருக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்து ஆகும்.

ϕ என்பது $\vec{c}$ மற்றும் $\vec{a} \times \vec{b}$-க்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்க.



படம் 2.22

இங்கு CL ஆனது $OADB$க்குச் செங்குத்து ஆகும். இங்கு CLஆனது இணைகரத்திண்மத்தின் உயரம் ஆகும்.

இங்கு CL-ம் $\vec{a} \times \vec{b}$-ம் அதே தளத்திற்கு செங்குத்தானவை.

CL-ம் $\vec{a} \times \vec{b}$-ம் இணையானவை.

$\Rightarrow \angle OCL = \phi$ (அடுத்தடுத்த கோணங்கள்)

செங்கோண முக்கோணம் OLC-இல் $CL = \left|\vec{c}\right| \cos \phi$

$\therefore$ இணைகரத்திண்மத்தின் உயரம் CL $= \left|\vec{c}\right| \cos\phi$

இணைகரத்திண்மத்தின் அடிபரப்பு = $\vec{a}$, $\vec{b}$ அடுத்தடுத்த பக்கங்களைக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு

இணைகரத்திண்மத்தின் அடிபரப்பு $= \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \left|\vec{c}\right| \cos\phi$$

= [அடிப்பரப்பு] [உயரம்]

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c}$ = $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-ஐ ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளைக் கொண்டு அமையும் இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு

$\therefore$ திசையிலி முப்பெருக்கம் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c}$ என்பது ஒரே முனையில் சந்திக்கின்ற வலக்கை அமைப்பை பெற்ற $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்கிற மூன்று வெக்டர்கள் அமைக்கும் இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு என்பதாகும்.

2.5.2 திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் பண்புகள் :

***பண்பு* (1) :**

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \,.\, \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \,.\, \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \,.\, \vec{b}$$ [சுற்றுவட்ட முறையில்]

***நிரூபணம்* :**

வலக்கை அமைப்பை பெற்ற, ஒரே முனையில் சந்திக்கின்ற மூன்று வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஓர் இணைகரத்திண்மத்தை உருவாக்குகிறது. எனவே இதன் கன அளவு $V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c}$

தெளிவாக $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவையும் வலக்கை அமைப்பு கொண்டு மேற்சொன்ன அதே இணைகரத்திண்மத்தின் பொது முனை கொண்ட விளிம்புகளாக அமையும்.

$\therefore V = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) . \vec{a}$ மற்றும் $V = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) . \vec{b}$ ஆகும்.

$$\therefore V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) . \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) . \vec{b} \qquad \ldots (1)$$

புள்ளிப் பெருக்கம் பரிமாற்றுப் பண்பை பெற்றுள்ளது.

எனவே (1) $\Rightarrow$ $V = \vec{c} \,.\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \,.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \,.\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \quad \ldots (2)$

(1) மற்றும் (2)-இலிருந்து

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = \vec{a} \,.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

இதிலிருந்து ஒரு திசையிலி முப்பெருக்கத்தில் புள்ளி மற்றும் குறுக்கு குறியீடுகளை பரிமாற்றம் செய்யலாம் என அறிகிறோம்.

இப்பண்பின் மூலம் திசையிலி முப்பெருக்கத்தினை பின்வரும் குறியீட்டால் எழுதலாம்.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = \vec{a} \,.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right]$$

$$\therefore \left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right] = \left[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}\right] = \left[\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}\right]$$

***பண்பு* (2) :**

ஒரு திசையிலி முப்பெருக்கத்தில் வரும் வெக்டர்களின் சுற்றுவட்ட வரிசையை மாற்றுவதால் திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் குறியில் மாற்றம் ஏற்படுமே தவிர எண்ணளவில் யாதொரு மாற்றமும் இராது.

(i.e.) $\left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right] = -\left[\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}\right] = -\left[\vec{c} \ \vec{b} \ \vec{a}\right] = -\left[\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{b}\right]$

நிரூபணம் :

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).\vec{c}$$

$$= -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right).\vec{c} \quad \because \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = -\left[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}\right] \qquad \ldots (1)$$

இதைப்போல் நாம் மற்ற முடிவுகளைப் பெறலாம்.

***பண்பு* (3) :** *திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் சமமெனில், விளைவு பூச்சியமாகும்.*

நிரூபணம் : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *என்பன மூன்று வெக்டர்கள்*

$\vec{a} = \vec{b}$ *எனில்*

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).\vec{c}$$

$$= \vec{o}\,.\,\vec{c} = 0 \qquad \left[\because\ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}\right]$$

இதைப்போல் நாம் $\vec{b} = \vec{c}$ *மற்றும்* $\vec{c} = \vec{a}$ *என்பனவற்றிற்கும் நிரூபிக்கலாம்.*

***பண்பு* (4) :**

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *என்பவை மூன்று வெக்டர்களாகவும்* λ *ஒரு திசையிலியாகவும் இருப்பின்* $\left[\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \lambda\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

நிரூபணம் :

$$\left[\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left(\lambda\vec{a} \times \vec{b}\right).\vec{c} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right).\vec{c}$$

$$= \lambda\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$

***பண்பு* (5) :**

மூன்று வெக்டர்களில் ஏதேனும் இரண்டு இணையாகவோ அல்லது ஒரே நேர்க்கோட்டமைந்ததாகவோ இருப்பின் அவற்றின் திசையிலி முப்பெருக்கம் பூச்சியமாகும்.

நிரூபணம் : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *என்பன மூன்று வெக்டர்கள் மற்றும்* $\vec{a}$*-ம்* $\vec{b}$*-ம் ஒரு தள வெக்டர்கள் அல்லது இணை வெக்டர்கள் எனில்* $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, λ *என்பது ஒரு திசையிலி.*

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\lambda\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \lambda\,(0) = 0$$

***பண்பு* (6) (*நிரூபணமின்றி*) :**

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற மற்றும் இணை அல்லாத வெக்டர்கள் ஒரே தள வெக்டர்களாக அமையத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0$

i.e., $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *தளஅமை வெக்டர்கள்* $\Leftrightarrow \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0$

***குறிப்பு* :**

$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0$ *ஆகக் கூடிய மூன்று நிலைகள் பின்வருமாறு :*

(i) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-*இல் குறைந்தது ஏதேனும் ஒன்றாவது ஒரு பூச்சிய வெக்டர்.*

(ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-*ல் ஏதேனும் இரண்டு இணை வெக்டர்கள்.*

(iii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *என்பன ஒரே தள அமை வெக்டர்கள்.*

நிலைகள் (i) *மற்றும்* (ii)-*ஐத் தவிர்த்து நிலை* (iii) *வெளிப்படையாக உண்மையாவதைக் காணலாம்.*

***முடிவு* :**

***திசையிலி முப்பெருக்கத்தை கூறுகளின் வாயிலாக எழுதுதல்* (Scalar Triple Product in terms of components) :**

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, *எனில்*

$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$,

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

***நிரூபணம்* :** $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\therefore \quad \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\right)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

குறுக்குப் பெருக்கம் வெக்டர் கூட்டலைப் பொறுத்து பங்கீட்டுப் பண்பை பெற்றுள்ளது (Distributivity of Cross product over Vector addition) :

முடிவு :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்களுக்கு

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{c}\right)$$

இக் கொள்கையை குறுக்குப் பெருக்கத்திற்குரிய அணிக்கோவை அமைப்பைக் கொண்டு நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.32 : $\vec{a} = -3\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு முனையில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு காண்க.

தீர்வு :

இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு $= \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 7 & 5 \\ -5 & 7 & -3 \\ 7 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -264$$

கன அளவு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

∴ எனவே இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு = 264 கன அலகுகள்.

குறிப்பு : திசையிலி முப்பெருக்கம் குறை எண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.33 : $\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}$ என்ற ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு $\left[\vec{a} + \vec{b}\ \ \vec{b} + \vec{c}\ \ \vec{c} + \vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$ என நிரூபி.

தீர்வு : $\left[\vec{a} + \vec{b}\ \ \vec{b} + \vec{c}\ \ \vec{c} + \vec{a}\right]$

$$= \left\{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right\} . \left(\vec{c} + \vec{a}\right)$$

$$= \left\{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right\} . \left(\vec{c} + \vec{a}\right)$$

$$= \left\{\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}\right\} . \left(\vec{c} + \vec{a}\right)$$

$$= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} + \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) . \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) . \vec{c}$$

$$+ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{a} + \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) . \vec{a} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) . \vec{a}$$

$$= \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] + \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 2.34 : $\vec{x} . \vec{a} = 0$, $\vec{x} . \vec{b} = 0$, $\vec{x} . \vec{c} = 0$ மேலும் $\vec{x} \neq \vec{0}$ எனில் $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ஒரே தள அமை வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$\vec{x} . \vec{a} = 0$ மற்றும் $\vec{x} . \vec{b} = 0$ எனில் $\vec{a}$-ம் $\vec{b}$-ம் $\vec{x}$-க்கு செங்குத்து ஆகும்.

$\therefore\ \vec{a} \times \vec{b}$ இணை $\vec{x}$

$$\therefore\ \vec{x} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

இங்கு $\vec{x} . \vec{c} = 0 \Rightarrow \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = 0 \Rightarrow \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0$

$\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ஒரு தள வெக்டர்கள்.

2.5.3 வெக்டர் முப்பெருக்கம் **(Vector Triple Product)** :

வரையறை :

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ மற்றும் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ என்பவை $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-இன் வெக்டர் முப்பெருக்கங்கள் ஆகும்.

முடிவு : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்ற வெக்டர்கள் எனில்

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} . \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} . \vec{c}\right)\vec{a}$$

இந்த தேற்றத்தை $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$;

$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$; $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ என்று எடுத்து நிரூபிக்கலாம்.

***பண்பு* (1) :** வெக்டர் முப்பெருக்கம் $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ என்பது அடைப்புக் குறிக்குள் இருக்கும் இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

***பண்பு* (2) :** வெக்டர் முப்பெருக்கம் $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ என்பது $\vec{c}$-க்கு செங்குத்தாகவும் மற்றும் $\vec{a}$, $\vec{b}$ அமைந்த தளத்திலும் இருக்கும்.

***பண்பு* (3) :**

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\,.\,\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)\vec{c}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.35 : $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ எனில்

$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{o}$ என நிரூபி.

***தீர்வு* :**

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} \text{ கொடுக்கப்பட்டது}$$

$$\left(\vec{a}\,.\,\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{a}\,.\,\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\,.\,\vec{c}\right)\vec{a}$$

$$\Rightarrow\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{b}\,.\,\vec{c}\right)\vec{a}$$

$$\Rightarrow\left(\vec{c}\,.\,\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{0}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36 : $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ எனில் $\vec{c}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, (i) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (ii) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ காண்க மற்றும் இவை இரண்டும் சமமல்ல எனக் காட்டுக.

***தீர்வு* :**

(i)
$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-3&6\\5&-1&2\end{vmatrix}=20\vec{j}+10\vec{k}$$

$$\therefore\ \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&-4\\0&20&10\end{vmatrix}=100\vec{i}-30\vec{j}+60\vec{k}$$

(ii) $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -38\vec{j} - 19\vec{k}$$

$$\therefore \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -38 & -19 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -95\vec{i} - 95\vec{j} + 190\vec{k}$$

(i) மற்றும்(ii)–இலிருந்து

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \neq \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$$

2.5.4 நான்கு வெக்டர்களின் பெருக்கம் :

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ என்ற நான்கு வெக்டர்களில், $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ மற்றும் $\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$ என்ற இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$
என்பது நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.37 : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ என்பவை ஏதேனும் நான்கு வெக்டர்கள் எனில்

(i) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{d}\right]\vec{c} - \left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]\vec{d}$

(ii) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \left[\vec{a}\;\vec{c}\;\vec{d}\right]\vec{b} - \left[\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{d}\right]\vec{a}$ என நிரூபி,

தீர்வு :

(i) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \vec{x}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$ இங்கு $\vec{x} = \vec{a}\times\vec{b}$

$$= \left(\vec{x}\,.\,\vec{d}\right)\vec{c} - \left(\vec{x}\,.\,\vec{c}\right)\vec{d}$$

$$= \left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\,\vec{d}\right\}\vec{c} - \left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\,\vec{c}\right\}\vec{d}$$

$$= \left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{d}\right]\vec{c} - \left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]\vec{d}$$

இதேப் போல் $\vec{x} = \vec{c}\times\vec{d}$ என்று எடுத்து மற்ற முடிவுகளை நாம் அடையலாம்.

குறிப்பு : (1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ என்பவை ஒரு தள வெக்டர்கள் எனில்

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \vec{o} .$$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன ஒரு தளத்திலும், $\vec{c}$, $\vec{d}$ என்பன மற்றொரு தளத்திலும் அமைவதாகக் கொள்க. இவ்விரு தளங்களும் செங்குத்து எனில் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \vec{o}$

எடுத்துக்காட்டு 2.38 :

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}\right] = \left[\vec{a} \ \ \vec{b} \ \ \vec{c}\right]^2$$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}, \ \ \vec{b} \times \vec{c}, \ \ \vec{c} \times \vec{a}\right] = \left\{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right\} . \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$$

$$= \left\{\left[\vec{a} \ \ \vec{b} \ \ \vec{c}\right] \vec{b} - \left[\vec{a} \ \ \vec{b} \ \ \vec{b}\right] \ \vec{c}\right\} . \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$$

$$= \left[\vec{a} \ \ \vec{b} \ \ \vec{c}\right] \left\{\vec{b} . \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)\right\} \quad \left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{b}\right] = 0$$

$$= \left[\vec{a} \ \ \vec{b} \ \ \vec{c}\right] \ \left[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}\right]$$

$$= \left[\vec{a} \ \ \vec{b} \ \ \vec{c}\right]^2$$

2.5.5 நான்கு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் (Scalar product of four vectors) :

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ என்ற நான்கு வெக்டர்களில் $\vec{a} \times \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c} \times \vec{d}$ களின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ என்பது நான்கு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் எனப்படும்.

i.e. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$

முடிவு : $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ அணிக்கோவைப் வடிவம்.

i.e. $$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a} . \vec{c} & \vec{a} . \vec{d} \\ \vec{b} . \vec{c} & \vec{b} . \vec{d} \end{vmatrix}$$

நிரூபணம் :

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{x} \text{ . இங்கு } \vec{x} = \vec{c} \times \vec{d}$$

$$= \vec{a} . \left(\vec{b} \times \vec{x}\right)$$

(இங்கு புள்ளிப் பெருக்கம் குறுக்குப் பெருக்கம் இவற்றை பரிமாற்றம் செய்க)

$$= \vec{a} . \left[\vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)\right]$$

$$= \vec{a} . \left[\left(\vec{b} . \vec{d}\right) \vec{c} - \left(\vec{b} . \vec{c}\right) \vec{d}\right]$$

$$= \left(\vec{b} . \vec{d}\right) \left(\vec{a} . \vec{c}\right) - \left(\vec{b} . \vec{c}\right) \left(\vec{a} . \vec{d}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a} . \vec{c} & \vec{a} . \vec{d} \\ \vec{b} . \vec{c} & \vec{b} . \vec{d} \end{vmatrix}$$

பயிற்சி 2.5

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பன ஒருதள அமை வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$ என்பவையும் ஒருதள அமை வெக்டர்கள் ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை என்பதனைக் காட்டுக.

(2) $-12\vec{i} + \lambda\vec{k}, 3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} + \vec{j} - 15\vec{k}$ என்ற வெக்டர்களை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு 546 எனில் λ-இன் மதிப்பு காண்க.

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வெக்டர்கள் எனில் $\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\right| = abc$ எனக் காட்டு. இதன் மறுதலையும் உண்மை எனவும் காட்டுக.

(4) (1, 3, 1), (1, 1, − 1), (− 1, 1, 1) (2, 2, − 1) என்பன ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக. (குறிப்பு : இந்நான்கு புள்ளிகளினால் உருவாகும் ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் ஒரே தள அமைவன எனக் காட்டினால் போதுமானது).

(5) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ எனில் $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} . \vec{c}\right) \vec{b} - \left(\vec{a} . \vec{b}\right) \vec{c}$ என சரிபார்க்க.

(6) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{o}$ எனக் காட்டுக.

(7) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ எனில் $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ எனக் காட்டுக.

(8) $\vec{a}$ ம் $\vec{c}$ ம் ஒரே கோட்டமை வெக்டர்கள் எனில் $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ எனக்காட்டு, இதன் மறுதலையும் உண்மை எனக்காட்டு. இங்கு வெக்டர் முப்பெருக்கம் $\vec{0}$ அல்ல.

(9) எந்த ஒரு $\vec{a}$-க்கும்

$$\vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + \vec{j} \times (\vec{a} \times \vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = 2\vec{a}$$ என நிரூபி.

(10) $$(\vec{a} \times \vec{b}) . (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) . (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) . (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$$ என நிரூபி.

(11) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ எனில் $(\vec{a} \times \vec{b}) . (\vec{c} \times \vec{d})$-ஐக் காண்க.

(12) 11-ஆம் கணக்கிலுள்ள $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$-க்கு

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\ \vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\ \vec{d}$$

என்பதைச் சரிபார்க்க.

2.6 கோடுகள் (Lines) :

2.6.1 கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line) :

துணை அலகு மற்றும் துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடுகள் (Parametric and non parametric vector equations) :

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டில் அமைந்த P என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க. சில நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு கோட்டின் மீதுள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் $\vec{r}$ ஆல் நிறைவு செய்யக்கூடிய ஒரு தொடர்பினைக் கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு என அழைப்பர்.

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric vector equations) :

$\vec{r}$ ஆனது சில நிலைத்த வெக்டர்கள் மற்றும் மாறக்கூடிய திசையிலிகள் (துணை அலகுகள்) மூலமாக எழுதப்படுமாயின் அக்கோவையானது துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு எனப்படும்.

***துணை அலகு அல்லா வெக்டர் சமன்பாடு* (Non-parametric vector equation) :**

யாதொரு துணை அலகும் உட்படுத்தப்படாத சமன்பாட்டினை, துணை அலகு அல்லா வெக்டர் சமன்பாடு என்பர்.

***கோடுகளின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள்* (Vector and Cartesian Equations of Straight lines) :**

புறவெளியில் ஒரு கோட்டை பின்வரும் வழிகளில் தீர்மானிக்கலாம்.

(i) *அதன் மீது ஒரு புள்ளியும், அதன் திசையும் கொடுக்கப்படின்*

(ii) *அதன் மீது இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்படின்,*

குறிப்பு : பாடத்திட்டத்தின்படி சமன்பாட்டு வரைமுறைகள்* (2.6.2, 2.6.3) *தேவையில்லை. சமன்பாட்டின் அமைப்பு மட்டுமே தேவை. இருப்பினும், கற்றல் திறனை அதிகரிக்கும் நோக்குடன் சமன்பாட்டின் வரைமுறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

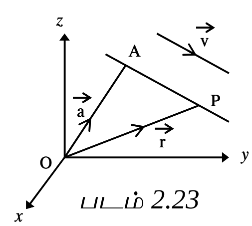
2.6.2 கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டருக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a straight line passing through a given point and parallel to a given vector) :

***வெக்டர் வடிவம்* (Vector form) :** O-ஐ *பொறுத்து நிலை வெக்டர்* $\vec{a}$ *எனக் கொண்ட புள்ளி* A *வழியாகவும்* $\vec{v}$*-க்கு இணையாகவும் ஒரு கோடு உள்ளது என்க. கோட்டின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி* P *எனவும்* O-ஐ *பொறுத்து இதனுடைய நிலை வெக்டர்* $\vec{r}$ *எனவும் கொள்க.*

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OP} = \vec{r}$

$\vec{AP}$*-யும்* $\vec{v}$*-யும் இணை வெக்டர்கள்*

$\therefore \vec{AP} = t\vec{v}$, t *என்பது ஏதேனும் ஒரு திசையிலி.*



படம் 2.23

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v} \qquad \dots (1)$$

இது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

***குறிப்பு* :** $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}$, *இங்கு* t *என்பது ஒரு திசையிலி* (i.e., *ஒரு துணை அலகு*) *எனவே, இந்தச் சமன்பாட்டை கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு என்கின்றோம்.*

***கிளைத்தேற்றம்* :** *இந்தக் கோடு ஆதிவழியாகச் செல்லுமானால், இதன் வெக்டர் சமன்பாடு* $\vec{r} = t\vec{v}$

கார்டீசியன் அமைப்பு :

நிலைப்புள்ளி A-இன் ஆயத்தொலைகள் $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ *மற்றும் இதற்கு இணையான வெக்டரின் திசைக் கொசைசைகள்* l, m, n *எனில்*

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;\ \vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v} \Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + t\left(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}\right)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *இவற்றின் உறுப்புகளை ஒப்பிட*

$$x = x_1 + tl$$
$$y = y_1 + tm$$
$$z = z_1 + tn$$

{இது கோட்டின் துணை அலகுச் சமன்பாடாகும்

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{l} = t, \quad \frac{y - y_1}{m} = t, \quad \frac{z - z_1}{n} = t$$

t*ஐ நீக்க, நாம் பெறுவது* $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$

இது $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ *என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும்* $l,\ m,\ n$ *என்ற திசை விகிதங்களை உடைய கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.*

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric vector equation) :

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\text{ஆனால் } \vec{AP} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{AP} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{r} - \vec{a}\right) \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} - \vec{a} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = \vec{a} \times \vec{v}$$

இது துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

2.6.3 கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a straight line passing through two given points) :

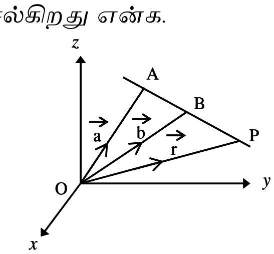
வெக்டர் அமைப்பு (Vector Form) :

O-ஐ பொறுத்து $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகளான *A*, *B* வழியாக ஒரு நேர்க்கோடு செல்கிறது என்க.

கோட்டின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி *P* எனவும் அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ எனவும் கொள்க.

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ மற்றும் $\vec{OP} = \vec{r}$ என்க.

$\vec{AP}$-யும் $\vec{AB}$-யும் இணையானவை.



படம் 2.24

$$\therefore \vec{AP} = t\,\vec{AB},\ t \text{ ஏதேனும் ஒரு திசையிலி}$$

$$= t\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) = t\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \quad (\text{அல்லது}) \qquad \ldots (1)$$

$$\vec{r} = (1 - t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு : $\vec{r} = (1 - t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$ இங்கு *t* என்பது திசையிலி. (i.e., துணை அலகு) எனவே இந்தச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

கார்டீசியன் அமைப்பு :

A, *B* என்ற நிலைத்த புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2)

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;\ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\ ;\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

இம்மதிப்புகளை (1)-இல் பிரதியிட,

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + t\left[\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\right]$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ இவற்றின் உறுப்புகளை ஒப்பிட

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

இவை அனைத்தும் கோட்டின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகள் ஆகும்

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

t-ஐ நீக்க, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்பு : $x_2 - x_1, \; y_2 - y_1, \; z_2 - z_1$ என்பன (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் ஆகும்.

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric vector equation) :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$
$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a}$$

$\vec{AP}$-யும் $\vec{AB}$-யும் கோட்டமை வெக்டர்கள் எனில்

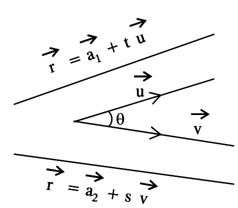
$$\Rightarrow \vec{AP} \times \vec{AB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \left(\vec{r} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{0}$$

இதுவே துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

2.6.4 இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two lines) :

$\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{v}$ என்பன ஒரு தளத்தில் அமைந்த இரண்டு கோடுகள்.

இவ்விரு கோடுகளும் $\vec{u}$ மற்றும் $\vec{v}$ என்ற வெக்டர்களின் திசையில் இருக்கின்றது.



படம் 2.25

இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்பது அவற்றின் திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும்.

θ என்பது கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

கார்டீசியன் அமைப்பு: கோட்டின் சமன்பாடுகள் கார்டீசியன் வடிவில் இருப்பின்

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \text{ மற்றும் } \frac{x - x_1}{a_2} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

a_1, b_1, c_1 மற்றும் a_2, b_2, c_2 என்பது இரு கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் எனில், இடைப்பட்ட கோணம்

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right]$$

குறிப்பு : இரு கோடுகளும் செங்குத்து எனில் $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.39 : $3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராய் உடைய புள்ளி A வழிச்செல்வதும் $-5\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$-க்கு இணையானதுமான கோட்டின் வெக்டர், கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : ஒரு புள்ளி $\vec{a}$ வழிச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டருக்கு $\vec{v}$ இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}$, t என்பது ஒரு திசையிலி.

இங்கு $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{v} = -5\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$

∴ நேர்க்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = \left(3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\right) + t\left(-5\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}\right) \qquad \ldots (1)$$

(x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் l, m, n என்ற திசை விகிதங்களை உடைய நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

இங்கு $(x_1, y_1, z_1) = (3, -1, 4)$

$(l, m, n) = (-5, 7, 3)$

∴ கோட்டின் தேவையான சமன்பாடு $\dfrac{x - 3}{-5} = \dfrac{y + 1}{7} = \dfrac{z - 4}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 2.40 : (– 5, 2, 3), (4, – 3, 6) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் வெக்டர், கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a}$, $\vec{b}$-ஐ நிலை வெக்டர்களாய்க் கொண்ட இரு புள்ளிகள் வழியேச் செல்லும் கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = \vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

இங்கு $$\vec{a} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ மற்றும்}$$

$$\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = 9\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

∴ கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = \left(-5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + t\left(9\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}\right) \text{ அல்லது}$$

$$\vec{r} = (1-t)\left(-5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + t\left(4\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}\right)$$

கார்டீசியன் அமைப்பு : தேவையான சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

இங்கு $(x_1, y_1, z_1) = (-5, 2, 3)$; $(x_2, y_2, z_2) = (4, -3, 6)$

$$\therefore \frac{x+5}{9} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{3}$$ என்பது கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.41 :

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + t\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) \text{ மற்றும்}$$

$$\vec{r} = 5\vec{j} + 2\vec{k} + s\left(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}\right)$$ என்ற இரண்டு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் $\vec{u}$ மற்றும் $\vec{v}$ வெக்டர்களின் திசைகளில் இருக்கட்டும்.

$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$, θ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்.

$$\therefore \cos\theta = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 19 \ ; \ \left|\vec{u}\right| = 3 \ ; \ \left|\vec{v}\right| = 7$$

$$\cos\theta = \frac{19}{21} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

பயிற்சி 2.6

(1) (2, 3, − 6) என்ற திசை விகிதங்களையுடைய கோட்டின் திசைக் கொசைகன்களைக் காண்க.

(2) (i) 30°, 45°, 60° திசைக் கோணங்களாகக் கொண்ட ஒரு வெக்டர் இருக்க இயலுமா?

(ii) 45°, 60°, 120° திசைக் கோணங்களாகக் கொண்ட ஒரு வெக்டர் இருக்க இயலுமா?

(3) ஆய அச்சுக்களுடன் சமகோணங்களை ஏற்படுத்தும் வெக்டரின் திசைக்கொசைன்கள் யாவை?

(4) ஒரு வெக்டர் $\vec{r}$-இன் எண் அளவு $35\sqrt{2}$ மற்றும் திசை விகிதங்கள் (3, 4, 5) எனில் அந்த வெக்டரின் திசைக்கொசைன்கள் மற்றும் கூறுகளைக் காண்க.

(5) (2, − 3, 1) மற்றும் (3, 1, − 2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(6) (3, − 4, − 2) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதும் $9\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையானதுமான கோட்டின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(7) (1, − 2, 1) மற்றும் (0, − 2, 3) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(8) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{6}$ மற்றும் $x + 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{2}$ என்ற கோடுகளின் இடைப்பட்டக் கோணம் காண்க.

(9) $\vec{r} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + \mu\left(-\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}\right)$, $\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{k} + \lambda\left(3\vec{i} + 4\vec{k}\right)$ என்ற கோடுகளின் இடைப்பட்டக் கோணம் காண்க.

2.6.5 ஒரே தளத்தில் அமையா கோடுகள் (Skew lines):

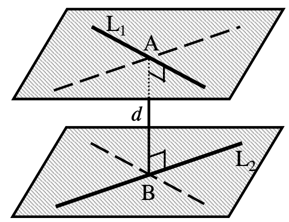
இரண்டு கோடுகளை புறவெளியில் எடுத்துக் கொள்வோம், அவை பின்வரும் மூன்று நிலைகளை அடைகிறது.

(i) அவை ஒன்றையொன்று வெட்டலாம்.

(ii) (அல்லது) அவை இணையாக அமையலாம்.

(iii) (அல்லது) அவை ஒன்றை ஒன்று வெட்டாமலும், இணையில்லாமலும் இருக்கலாம்.

புறவெளியில் அமைந்த இரண்டு வெட்டும் அல்லது இணைக்கோடுகளை ஒரே தள அமைகோடுகள் என்கின்றோம்.



படம் 2.26

அதாவது, ஒரு தளத்தை வெட்டும் கோடுகளின் வழியேச் செல்லக் கூடியதாகவோ அல்லது இணைக்கோடுகள் வழியேச் செல்லக்கூடியதாகவோ வரையறுக்க முடியும்.

எனவே ஒரே தளத்தின் மீதமைந்த இரண்டு கோடுகளை **ஒரே தள அமைக் கோடுகள்** என்கிறோம்.

புறவெளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமல், இணை அல்லாததாகவும் இருக்கும் இரண்டு நேர்க்கோடுகள் L_1 மற்றும் L_2வை **ஒரே தளத்தில் அமையாக் கோடுகள்** என்போம்.

இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்

(i) வெட்டும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் பூச்சியம் என்பது தெளிவு.

(ii) இணைகோடுகள்

தேற்றம் [நிரூபணம் இல்லாமல்]

$\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$; $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{u}$ என்ற இரண்டு இணை கோடுகளின் இடைப்பட்ட தூரம்

$$d = \frac{\left|\vec{u} \times \left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

(iii) ***ஒரே தளத்தில் அமையாக் கோடுகள்:தேற்றம் [நிரூபணம் இல்லாமல்]***

$\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$; $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{v}$ என்ற இரண்டு ஒரு தளத்தில் அமையா கோடுகளின் இடைப்பட்ட தூரம்

$$d = \frac{\left|\left[\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\ \vec{u}\ \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

இரு கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ள நிபந்தனைகள் :

$\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$; $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{v}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளுமாயின், அவற்றின் இடைப்பட்ட தூரம் 0 ஆகும்.

வெட்டிக்கொள்ள நிபந்தனை $d = 0 \Rightarrow \left[\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right) \vec{u}\ \vec{v}\right] = 0$ அல்லது

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ இங்கு}$$

(x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a}_1$ மற்றும் $\vec{a}_2$ ஆகும். $\vec{u}$ மற்றும் $\vec{v}$-இன் திசை விகிதங்கள் முறையே l_1, m_1, n_1 மற்றும் l_2, m_2, n_2 ஆகும். ($\vec{u}$ மற்றும் $\vec{v}$ இணையற்றவை)

எடுத்துக்காட்டு 2.42 : $\vec{r} = \left(\vec{i} - \vec{j}\right) + t\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$ மற்றும் $\vec{r} = \left(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$ என்ற இணை கோடுகளின் இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{u}$ எனில்

$$\vec{a}_1 = \vec{i} - \vec{j}\ ;\ \vec{a}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ மற்றும் } \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\left|\vec{u} \times \left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\right| = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{இணைகோட்டின்} \\ \text{இடைப்பட்ட தூரம்}\end{matrix}\right\} = \frac{\left|\vec{u} \times \left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$$

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் கார்டீசியன் அமைப்பில்

இருந்தால் முதலில் அதனை வெக்டர் அமைப்பாக மாற்றி, இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2.43 : $\vec{r} = \left(\vec{i} - \vec{j}\right) + t\left(2\vec{i} + \vec{k}\right)$ மற்றும் $\vec{r} = \left(2\vec{i} - \vec{j}\right) + s\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ என்ற இரு கோடுகள் ஒரே தள அமையாக் கோடுகள் எனக் காட்டி, அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரத்தையும் காண்க.

தீர்வு : $\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{v}$ எனில்

$$\vec{a}_1 = \vec{i} - \vec{j}\ ;\ \vec{a}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ மற்றும் } \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k};\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{i}$$

$$\left[\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\vec{u}\ \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

∴ அவை ஒரே தள அமையாக் கோடுகள்.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{14}$$

$$\text{கோடுகளின் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்} = \frac{\left|\left[\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\vec{u}\ \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} \quad \ldots (1)$$

(1)-இலிருந்து அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் $= \frac{1}{\sqrt{14}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.44 :

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$ மற்றும் $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் எனக் காட்டி அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு : கோடுகள் வெட்டிக்கொள்வதற்கான நிபந்தனை

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ மற்றும் $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ உடன் ஒப்பிட

கிடைப்பது $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, -1)$; $(x_2, y_2, z_2) = (4, 0, -1)$

$(l_1, m_1, n_1) = (3, -1, 0)$; $(l_2, m_2, n_2) = (2, 0, 3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

(இங்கு $\vec{u}$-ம் $\vec{v}$-ம் இணையற்றவை என்பதைக் காண்க.)

$\therefore$ மேற்குறிப்பிட்ட கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன.

***வெட்டும் புள்ளி* (Point of intersection) :**

$\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z + 1}{0} = \lambda$ என்க.

$\therefore$ இந்தக் கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(3\lambda + 1, -\lambda + 1, -1)$ ஆகும்.

$\dfrac{x - 4}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z + 1}{3} = \mu$ என்க.

இந்தக் கோட்டின் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(2\mu + 4, 0, 3\mu - 1)$ ஆகும்.

இவை வெட்டிக் கொள்வதால் ஏதேனும் λ, μக்கு

$(3\lambda + 1, -\lambda + 1, -1) = (2\mu + 4, 0, 3\mu - 1) \Rightarrow \lambda = 1$ மற்றும் $\mu = 0$ என்ற வெட்டும் புள்ளியைக் கணக்கிட $\lambda = 1$ மற்றும் $\mu = 0$ என்ற மதிப்புகளில் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை எடுத்துக் கொள்க.

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி $(4, 0, -1)$.

***குறிப்பு* :** இரண்டு கோடுகளும் வெக்டர் அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டால் முதலில் அதனை கார்டீசியன் அமைப்புக்கு மாற்றி, தீர்க்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.45 : $\vec{r} = \left(\vec{i} - \vec{j}\right) + \lambda\left(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$ மற்றும் $\vec{r} = \left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) + \mu\left(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$ என்ற இரண்டு ஒரே தளத்தில் அமையாத கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தைக் கணக்கிடு.

***தீர்வு* :** பெறப்பட்டச் சமன்பாடுகளை $\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{v}$ உடன் ஒப்பிட

$\vec{a}_1 = \vec{i} - \vec{j}$; $\vec{a}_2 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

$\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = 2\vec{j} - \vec{k} \text{ மற்றும் } \vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\left[\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right) \vec{u} \ \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = 4\sqrt{2}$$

$$\text{இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்} = \frac{\left|\left[\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right) \vec{u} \ \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

2.6.7 மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைத் தன்மை
(Collinearity of three points) :

தேற்றம் [நிரூபணம் இல்லாமல்] :

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற நிலை வெக்டர்களாக உடைய மூன்று புள்ளிகள் முறையே *A*, *B*, *C* என்க. இவை ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகளாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்ற மூன்று எல்லாமே பூச்சியமற்ற திசையிலிகளை $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{o}$ மற்றும் $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ எனுமாறு காணமுடிதல் வேண்டும்.

***ஒரே கோட்டமைத் தன்மையை சோதிக்கும் வழிமுறைகள்* (Working rule to find the collinearity) :**

இரண்டு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுத வேண்டும், அதில் மூன்றாவது புள்ளியை பிரதியிட்டு சரிபார்க்க வேண்டும்.

குறிப்பு : மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தவகைளாக இருந்தால், அதன் நிலை வெக்டர்களும் ஒரு தள அமைந்தவைகளாக இருக்கும். இதன் மறுதலை உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 2.46 : (3, – 1, – 1), (1, 0, – 1) மற்றும் (5, – 2, – 1) என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனக்காட்டுக.

***தீர்வு* :** (3, – 1, – 1) மற்றும் (1, 0, – 1) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{0} = \lambda$ என்க

இந்தக் கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(2\lambda + 3, -\lambda - 1, -1)$, இதில் $\lambda = 1$ பிரதியிட்டால் $(5, -2, -1)$ என்ற புள்ளி கிடைக்கும்.

$\therefore$ எனவே மூன்றாவது புள்ளி அதே கோட்டில் அமைந்துள்ளது. மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டமையாகிறது.

குறிப்பு :

புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் கொடுக்கப்பட்டால் முதலில் புள்ளிகளைக் கண்டு பின்னர் தீர்க்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.47 :

$(3, 2, -4), (9, 8, -10)$ மற்றும் $(\lambda, 4, -6)$ ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனில் λ-இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைந்தவை. எனவே, அவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் அமையும்.

Let $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{b} = 9\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$; $\vec{c} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$

$$\left[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 9 & 8 & -10 \\ \lambda & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 12\lambda = 60 \ \Rightarrow \ \lambda = 5$$

பயிற்சி 2.7

(1) இணைகோடுகளின் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

(i) $\vec{r} = \left(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) + t\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ மற்றும்

$\vec{r} = \left(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

(ii) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{2}$ மற்றும் $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$

(2) $\vec{r} = \left(3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}\right) + t\left(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right)$ மற்றும்

$\vec{r} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(7\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}\right)$ என்பன ஒரு தளத்தில் அமையாத கோடுகள் எனக் காட்டுக.

(3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ மற்றும் $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{1}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக. மேலும் அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(4) $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-4}{1}$ மற்றும் $\frac{x}{-3} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-2}{4}$ என்ற ஒரு தளத்தில் அமையாத கோடுகளின் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தைக் காண்க.

(5) (2, − 1, 3), (1, − 1, 0) மற்றும் (3, − 1, 6) என்பன ஒரே கோட்டமைந்தவை எனக்காட்டு.

(6) (λ, 0, 3), (1, 3, − 1) மற்றும் (− 5, − 3, 7) ஒரே கோட்டமைந்தவை எனில் λ-இன் மதிப்பு காண்க.

2.7 தளங்கள் (Planes) :

ஒரு முடிவற்ற பரப்பானது, அதிலுள்ள ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு அதன் மீது இருக்குமாறு அமையுமாயின் அதனை ஒரு தளம் என அழைக்கலாம்.

2.7.1. தளங்களின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் துணை அலகு மற்றும் துணை அலகு அற்ற வடிவில் :

பின்வரும் நிலைகளில் ஒரு தளத்தை ஒரே ஒரு வழியில் தீர்மானிக்க இயலும்.

(i) அதன் மீது ஒரு புள்ளி, மற்றும் அதற்குச் செங்குத்தான ஒரு கோடு கொடுக்கப்பட்டால்

(ii) அதன் ஒரு செங்கோடு மற்றும் ஆதியிலிருந்து அத்தளத்தின் தூரம் கொடுக்கப்பட்டால்

(iii) அதன் மீது ஒரு புள்ளி, மற்றும் அதற்கு இணையான இரண்டு வெக்டர்கள் கொடுக்கப்பட்டால்

(iv) அதன் மீது ஒரு புள்ளி, மற்றும் தளத்திற்கு இணையாக ஒரு கோடு கொடுக்கப்பட்டால்

(v) ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால்

(vi) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு.

(vii) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகவும், ஒரு தரப்பட்ட புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு.

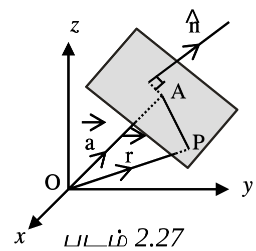
குறிப்பு : ***பாடத்திட்டத்தின்படி சமன்பாட்டு வரைமுறைகள்*** **(2.7.1** ***முதல்*** **2.7.5** ***வரை) தேவையில்லை. சமன்பாட்டின் அமைப்பு மட்டுமே தேவை. இருப்பினும், கற்றல் திறனை அதிகரிக்கும் நோக்குடன் சமன்பாட்டின் வரைமுறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,***

2.7.1 கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதும் ஒரு வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு :

வெக்டர் அமைப்பு:

A எனும் புள்ளி வழியாகவும், $\vec{n}$-க்குச் செங்குத்தாகவும் தளம் உள்ளது எனக் கொள்க. O-ஐ பொறுத்து A-இன் நிலை வெக்டர் $\vec{a}$ என்க.

தளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க. இதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க. $\overrightarrow{AP}$-ஐ சேர்க்க.



படம் 2.27

$\overrightarrow{AP}$ ஆனது $\vec{n}$ க்குச் செங்குத்து.

$$\therefore \overrightarrow{AP}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right).\vec{n} = 0$$

$$\left(\vec{r} - \vec{a}\right).\vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}.\vec{n} = \vec{a}.\vec{n}$$

இதுவே தேவையான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும் (துணை அலகு அல்லாத).

கார்டீசியன் வடிவம் : *A-இன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1, z_1) மற்றும் a, b, c என்பன $\vec{n}$-இன் திசை விகிதங்கள் எனில்*

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;\ \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\ ;\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\left(\vec{r} - \vec{a}\right).\vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}\right].\left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$ *ஆகும்.*

இதுவே தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு ஆகும் (துணை அலகு அல்லாத)

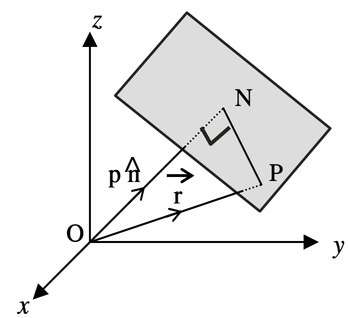
கிளைத்தேற்றம் : *ஆதிவழிச் செல்வதும் தளத்திற்குச் செங்குத்து $\vec{n}$ உடையதுமான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}.\vec{n} = 0$*

2.7.2 ஆதியிலிருந்து தளத்தின் தொலைவு மற்றும் அலகு செங்கோடு வெக்டர் கொடுக்கப்பட்டால் தளத்தின் சமன்பாடு :

ஆதி O இருந்து தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு ON-இன் நீளம் p என்க. $\hat{n}$ ஆனது தளத்திற்கு செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர். இது ON-இன் திசையில் இருக்கும் எனில்

$\overrightarrow{ON} = p\hat{n}$.

தளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க,



படம் 2.28

Oஐ பொறுத்து இதனுடைய நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க. (i.e.,) $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. NPஐ சேர்க்க $\overrightarrow{NP}$ என்பது தளத்திலும் $\overrightarrow{ON}$ என்பது தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் உள்ளது.

$$\Rightarrow \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}\right) \cdot \overrightarrow{ON} = 0$$

$$\left(\vec{r} - p\hat{n}\right) \cdot p\hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \hat{n} - p\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$$

$$\text{i.e., } \vec{r} \cdot \hat{n} = p \qquad \left(\because \hat{n} \cdot \hat{n} = 1\right)$$

இதுவே தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும் (துணை அலகு அல்லாத)

கார்டீசியன் வடிவம் :

l, m, n என்பது $\vec{n}$-இன் திசைக் கொசைன்கள் மற்றும் $\vec{n} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p \Rightarrow \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \left(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}\right) = p$$

$$lx + my + nz = p$$

இதுவே தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு (துணை அலகு அல்லாதது).

கிளைத் தேற்றம் : $\vec{n}$ ஓரலகு அல்லாத செங்குத்து வெக்டர் எனில்

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$\vec{r} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = p \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = p|\vec{n}| = q \text{ (என்க)}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = q$$

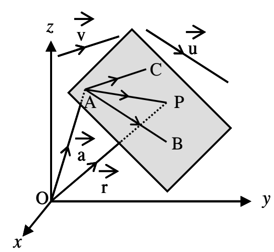
இதுவே தளத்தின் செங்கோட்டு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

ஆதி Oவிலிருந்து தளத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு $\dfrac{q}{|\vec{n}|}$ ஆகும்.

2.7.3 கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியாகவும் கொடுக்கப்பட்ட இரு வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் அமைந்த தளத்தின் சமன்பாடு :

வெக்டர் அமைப்பு :

Oஐ பொறுத்து $\vec{a}$ஐ நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி A வழியாகவும் $\vec{u}$, $\vec{v}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் தளம் அமைகிறது எனக் கொள்க. தளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P எனவும் அதனுடைய நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ எனவும் கொள்க. (i.e.,) $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$.



படம் 2.29

A வழியாக $\vec{u}$, $\vec{v}$க்கு இணையாக AB, AC என்ற தளத்தில் கோடுகள் $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ என்றவாறு தளத்தில் வரைக.

ஆனால் $\overrightarrow{AP}$ஆனது $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$உடன் ஒரே தள அமைப்புடையது.

$$\therefore \overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC} \quad s, t \text{ என்பது திசையிலிகள்}$$

$$= s\vec{u} + t\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = a + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \qquad \ldots (1)$$

இதுவே தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும். (துணை அலகு வடிவில்)

கார்டீசியன் அமைப்பு :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{u} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k} \;\; ; \;\; \vec{v} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$$

(1)-இலிருந்து $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + s\left(l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}\right) + t\left(l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}\right)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *ஆகியவற்றின் கெழுக்களை ஒப்பிட*

$$x = x_1 + sl_1 + tl_2$$
$$y = y_1 + sm_1 + tm_2$$
$$z = z_1 + sn_1 + tn_2$$

இவை கார்டீசியன் வடிவில் துணை அலகுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$$\Rightarrow x - x_1 = sl_1 + tl_2$$
$$y - y_1 = sm_1 + tm_2$$
$$z - z_1 = sn_1 + tn_2$$

$s, t,$ ஆகியவற்றை நீக்க $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

இதுவே தேவையான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு ஆகும். (துணை அலகு அல்லாத வடிவில்)

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு :

$\vec{AP}, \vec{AB}$ *மற்றும்* $\vec{AC}$ *ஓர் தளத்தில் உள்ளவை* i.e., $\vec{r} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}$ *ஒரு தள வெக்டர்கள்.*

$$\therefore \left[\vec{r} - \vec{a} \;\; \vec{u} \;\; \vec{v}\right] = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \left[\vec{r} \;\; \vec{u} \;\; \vec{v}\right] = \left[\vec{a} \;\; \vec{u} \;\; \vec{v}\right]$$

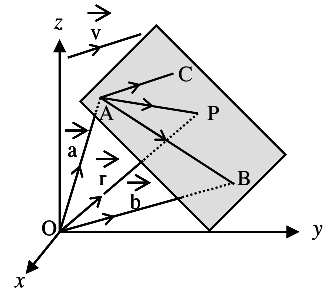
இதுவே தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு. (துணை அலகு அல்லாத வடிவில்)

2.7.4 கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழியாகவும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டருக்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு :

வெக்டர் அமைப்பு :

O-ஐ பொறுத்து $\vec{a}$, $\vec{b}$ க்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் முறையே A, B என்க.

$\vec{v}$ என்பது தரப்பட்ட வெக்டர் என்க. தேவையான தளம் A, B வழியே செல்கிறது. மேலும் $\vec{v}$ க்கு இணையாகவும் அமைகிறது எனக் கொள்க.



படம் 2.30

தளத்தின் மீது ஏதேனும் ஓர் புள்ளி P எனவும் அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ எனவும் கொள்க. (i.e.,) $\vec{OP} = \vec{r}$.

A வழியாக AC என்ற கோடு $\vec{AC} = \vec{v}$ என்றவாறு வரைக.

$\vec{AP}$ ஆனது $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ஆகியவற்றுடன் ஒரே தளத்தில் உள்ளதால்

$\therefore \vec{AP} = s\,\vec{AB} + t\,\vec{AC}$, s, t என்பவை திசையிலிகள்.

$$= s\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) + t\,\vec{v} = s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t\,\vec{v}$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t\,\vec{v} \qquad \ldots (1)$$

$$\vec{r} = (1 - s)\,\vec{a} + s\,\vec{b} + t\,\vec{v}$$

இதுவே தளத்தின் வெக்டர் (துணை அலகு வடிவம்) சமன்பாடு ஆகும்.

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு :

$\vec{AP}$, $\vec{AB}$ மற்றும் $\vec{AC}$ ஒரே தள அமைப்பு உள்ளது. i.e., $\vec{r} - \vec{a}$, $\vec{b} - \vec{a}$ மற்றும் $\vec{v}$ ஒரே தள அமைப்பு உடையது. $\therefore \left[\vec{r} - \vec{a} \;\; \vec{b} - \vec{a} \;\; \vec{v}\right] = 0$

இதுவே தேவையான தளத்தின் வெக்டர் (துணை அலகு அல்லாத) சமன்பாடு ஆகும்.

கார்டீசியன் வடிவம் :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \;;\quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \quad;\quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(1)-இலிருந்து

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$

$$+ s\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right] + t\left(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}\right)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ஆகியவற்றின் உறுப்புகளை ஒப்பிடுக.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + s(x_2 - x_1) + tl \\ y &= y_1 + s(y_2 - y_1) + tm \\ z &= z_1 + s(z_2 - z_1) + tn \end{aligned}\right|$$

இதுவே துணை அலகு கார்டீசியன் வடிவச் சமன்பாடாகும்.

$$\Rightarrow \begin{aligned} (x - x_1) &= s(x_2 - x_1) + tl \\ (y - y_1) &= s(y_2 - y_1) + tm \\ (z - z_1) &= s(z_2 - z_1) + tn \end{aligned}$$

$$s, t \text{ஐ நீக்க} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

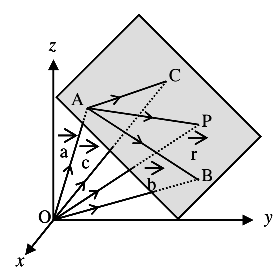
இதுவே தளத்தின் கார்டீசியன் வடிவச் சமன்பாடு ஆகும். (துணை அலகு அல்லாத)

2.7.5 கொடுக்கப்பட்ட ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள்:

வெக்டர் அமைப்பு:

O-ஐப் பொறுத்து $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ஐ நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் முறையே A, B, C என்க. தேவையான தளம் A, B மற்றும் C வழியேச் செல்கிறது.

தளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க, அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ ஆகும். (i.e.,) $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$



படம் 2.31

AB, *AC*, *AP*களைச் சேர்க்க. $\overrightarrow{AP}$ ஆனது $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$யுடன் ஒரே தள அமைப்பு உடையது.

$$\therefore \overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC} \quad s, t \text{ என்பன திசையிலிகள்.}$$

$$= s\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + t\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$= s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\vec{c} - \vec{a}\right)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \text{ (or)} \quad \ldots (1)$$

$$\vec{r} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\,\vec{c}$$

இதுவே தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு(துணை அலகு வடிவம்).

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு :

$\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ ஒரு தள அமைப்புடையது

(i.e.,) $$\left[\overrightarrow{AP}\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right] = 0$$

$$\therefore \left[\vec{r} - \vec{a}\ \ \vec{b} - \vec{a}\ \ \vec{c} - \vec{a}\right] = 0$$

இதுவே தேவையான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும். (துணை அலகு அல்லாத வடிவம்)

கார்டீசியன் அமைப்பு :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;\ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_3\vec{k}\ ;\ \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

(1)-இலிருந்து

$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$

$$+ s\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right]$$

$$+ t\left[(x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}\right]$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ களின் உறுப்புகளை ஒப்பிட,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z &= z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{aligned}\right|$$ இதுவே துணை அலகு சமன்பாட்டின் கார்டீசியன் அமைப்பு

s, t ஆகியவற்றை நீக்க, $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

இதுவே தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு (துணை அலகு அல்லாத வடிவில்).

எடுத்துக்காட்டு 2.48 : $3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ எனும் வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும் ஆதியிலிருந்து 8 அலகுகள் தூரத்தில் இருக்கும் தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : இங்கு $p = 8$ மற்றும் $\vec{n} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{17}}$$

இங்கு தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $\vec{r} \cdot \hat{n} = p$

$$\vec{r} \cdot \frac{3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{17}} = 8$$

$$\vec{r} \cdot \left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 8\sqrt{17}$$

கார்டீசியன் அமைப்பு : $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 8\sqrt{17}$

$3x + 2y - 2z = 8\sqrt{17}$

எடுத்துக்காட்டு 2.49 : ஆதியில் இருந்து ஒரு தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிப்புள்ளி (4, − 2, − 5) எனில் அத்தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : இங்கு தேவையான தளமானது $A(4, -2, -5)$ வழியே செல்கிறது. மேலும் $\vec{OA}$ வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைகிறது.

$\therefore \vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$ மற்றும் $\vec{n} = \vec{OA} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$

$\therefore$ தளத்தின் தேவையான சமன்பாடு $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$

$$\vec{r}\,.\left(4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}\right)=\left(4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}\right).\left(4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}\right)$$
$$= 16 + 4 + 25$$
$$\vec{r}\,.\left(4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}\right) = 45 \qquad \ldots (1)$$

கார்டீசியன் அமைப்பு :

$$\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}\right) = 45$$
$$4x - 2y - 5z = 45$$

எடுத்துக்காட்டு 2.50 : (2, – 1, – 3) வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-4}$ மற்றும் $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : தேவையான தளமானது $A(2, -1, -3)$ வழியேச் செல்லும். மேலும் $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ மற்றும் $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$-க்கு இணையாக இருக்கும்.

∴ தேவையான சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}$

$$\vec{r} = \left(2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}\right) + s\left(3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

கார்டீசியன் அமைப்பு :

(x_1, y_1, z_1) என்பது (2, – 1, –3) ; (l_1, m_1, n_1) என்பது (3, 2, –4) ; (l_2, m_2, n_2) என்பது (2, –3, 2)

$$\text{தளத்தின் சமன்பாடு} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i.e.,} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 8x + 14y + 13z + 37 = 0$

இதுவே தேவையான சமன்பாட்டின் கார்டீசியன் அமைப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.51 : $(-1, 1, 1)$ மற்றும் $(1, -1, 1)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக் கூடியதும் $x + 2y + 2z = 5$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக அமைவதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : $x + 2y + 2z = 5$ என்ற தளத்தின் செங்குத்து வெக்டர் ஆனது $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ஆகும். இவ்வெக்டர் தேவையான தளத்திற்கு இணையாக அமையும். எனவே தேவையான தளமானது $(-1, 1, 1)$ மற்றும் $(1, -1, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக் கூடியதும் $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும் அமையும்.

தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு :

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடியதும் ஒரு வெக்டருக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு.

$\vec{r} = (1 - s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{v}$ இங்கு s மற்றும் t திசையிலிகள் ஆகும்.

இங்கு $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\therefore \vec{r} = (1 - s)\left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) + t\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

இதுவே தளத்தின் தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

கார்டீசியன் அமைப்பு :

(x_1, y_1, z_1) என்பது $(-1, 1, 1)$; (x_2, y_2, z_2) என்பது $(1, -1, 1)$; (l_1, m_1, n_1) என்பது $(1, 2, 2)$

தளத்தின் சமன்பாடு $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

i.e., $$\begin{vmatrix} x + 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2x + 2y - 3z + 3 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.52 : $(2, 2, -1)$, $(3, 4, 2)$ மற்றும் $(7, 0, 6)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடிய தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : ஒரே கோட்டமையாத கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் வழியேச் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{r} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ *s* மற்றும் *t* திசையிலிகள்.

இங்கு $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 7\vec{i} + 6\vec{k}$

$\therefore \vec{r} = (1-s-t)\left(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) + s\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}\right) + t\left(7\vec{i} + 6\vec{k}\right)$

தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு :

இங்கு (x_1, y_1, z_1) என்பது $(2, 2, -1)$; (x_2, y_2, z_2) என்பது $(3, 4, 2)$; (x_3, y_3, z_3) என்பது $(7, 0, 6)$

தளத்தின் சமன்பாடு $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

i.e., $$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$5x + 2y - 3z = 17$ இதுவே தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு.

பயிற்சி 2.8

(1) $2\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$ எனும் வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும் ஆதியில் இருந்து 18 அலகுகள் தூரத்தில் இருக்கும் தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(2) $2x - y + 2z = 5$ என்ற தளத்தின் செங்குத்து அலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

(3) ஆதியிலிருந்து $\vec{r} \cdot \left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}\right) = 26$ என்ற தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

(4) ஆதியிலிருந்து ஒரு தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிப்புள்ளி $(8, -4, 3)$ எனில் அத்தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(5) $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ என்பதனை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழியேச் செல்லக் கூடியதும் $4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ என்ற வெக்டருக்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(6) $(2, -1, 4)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்வதும் $\vec{r} \cdot \left(4\vec{i} - 12\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 7$ என்ற தளத்திற்கு இணையானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(7) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(8) (1, 3, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{3}$ மற்றும் $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ என்ற கோடுகளுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(9) (–1, 3, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x+2y+2z = 5$ மற்றும் $3x+y+2z = 8$ ஆகிய தளங்களுக்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(10) $A(1, -2, 3)$ மற்றும் $B(-1, 2, -1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(11) (1, 2, 3) மற்றும் (2, 3, 1) என்ற புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக் கூடியதும் $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் அமைந்த தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(12) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் (– 1, 1, – 1) என்ற புள்ளி வழியேச் செல்லக் கூடியதுமான வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(13) $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ மற்றும் $7\vec{i} + \vec{k}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் வழியேச் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(14) வெட்டுத்துண்டு வடிவில் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டைத் தருவிக்க.

(15) பின்வரும் தளங்களின் கார்டீசியன் அமைப்பைத் தருக.

(i) $\vec{r} = (s-2t)\vec{i} + (3-t)\vec{j} + (2s+t)\vec{k}$

(ii) $\vec{r} = (1+s+t)\vec{i} + (2-s+t)\vec{j} + (3-2s+2t)\vec{k}$

2.7.6 கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane passing through the line of intersection of two given planes) :

வெக்டர் அமைப்பு:

$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = q_1$ மற்றும் $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = q_2$ ஆகிய தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடானது

$$\left(\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - q_1\right) + \lambda\left(\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - q_2\right) = 0$$

$$\text{i.e. } \vec{r} \cdot \left(\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2\right) = q_1 + \lambda q_2$$

கார்டீசியன் அமைப்பு :

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ஆகிய தளங்கள் வெட்டும் கோடு வழியேச் செல்லும் தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.53 : $2x - 3y + 4z = 1$ மற்றும் $x - y = -4$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியேச் செல்லக் கூடியதும் (1, 1, 1) என்ற புள்ளி வழியேச் செல்வதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

இரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியேச் செல்லும் ஏதேனும் ஓர் தளத்தின் சமன்பாடு $(2x - 3y + 4z - 1) + \lambda(x - y + 4) = 0$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

இது (1, 1, 1) வழியேச் செல்வதால் $\lambda = -\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $(2x - 3y + 4z - 1) - \frac{1}{2}(x - y + 4) = 0$

i.e., $3x - 5y + 8z - 6 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.54 : $2x - 8y + 4z = 3$ மற்றும் $3x - 5y + 4z + 10 = 0$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியேச் செல்லக் கூடியதும் $3x - y - 2z - 4 = 0$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியேச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(2x - 8y + 4z - 3) + \lambda(3x - 5y + 4z + 10) = 0$ i.e., $(2 + 3\lambda)x + (-8 - 5\lambda)y + (4 + 4\lambda)z + (-3 + 10\lambda) = 0$. ஆனால் தேவையான தளம் $3x - y - 2z - 4 = 0$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக இருக்கிறது. எனவே அவற்றின் செங்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாக இருக்கும்.

i.e., $(2 + 3\lambda)\, 3 + (-8 - 5\lambda)(-1) + (4 + 4\lambda)(-2) = 0$

$6\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -1$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $(2x - 8y + 4z - 3) - 1(3x - 5y + 4z + 10) = 0$

$$-x - 3y - 13 = 0$$

$$x + 3y + 13 = 0$$

2.7.7 ஒரு தளத்திற்கும், ஒரு புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் :

(x_1, y_1, z_1) என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $ax + by + cz + d = 0$ என்பது ஏதேனும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு, இப்புள்ளிக்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $\left|\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

கொள்கை (1) :

ஆதிக்கும் $ax + by + cz + d = 0$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $\left|\dfrac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

கொள்கை (2) :

$ax + by + cz + d_1 = 0$ மற்றும் $ax + by + cz + d_2 = 0$ என்ற இணைத் தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $\left|\dfrac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

குறிப்பு : தரப்பட்ட சமன்பாடு வெக்டர் அமைப்பில் இருப்பின் அதை கார்டீசியன் அமைப்பிற்கு மாற்றி தூரத்தைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2.55 : $(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து $\vec{r} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + t\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$ என்ற தளத்திற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : தரப்பட்ட தளமானது $(1, 1, 1)$ வழிச் செல்லக்கூடியதும் $\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$ மற்றும் $\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் உள்ளது.

$\therefore$ அதற்குரிய கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1) \\ (l_1, m_1, n_1) = (1 - 1, 0) \\ (l_2, m_2, n_2) = (0, 1, -1) \end{cases}$$

i.e., $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ i.e., $x + y + z - 3 = 0$

இங்கு $(x_1, y_1, z_1) = (1, -1, 2)$

$\therefore$ தூரம் $= \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\dfrac{1 - 1 + 2 - 3}{\sqrt{1 + 1 + 1}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.56 : $\vec{r}.\left(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = 3,\quad \vec{r}.\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = 5$ ஆகிய இணைத்தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : தளங்களின் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் சமன்பாடுகளுக்குரிய கார்டீசியன் சமன்பாடுகள்

$-x - y + z - 3 = 0$ மற்றும் $x + y - z - 5 = 0$

i.e., $x + y - z + 3 = 0$ மற்றும் $x + y - z - 5 = 0$

தூரம் $= \left|\dfrac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\dfrac{3 + 5}{\sqrt{1 + 1 + 1}}\right| = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$

2.7.8 கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நேர்க்கோடுகளை உள்ளடக்கிய தளத்தின் சமன்பாடு [அதாவது கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நேர்க்கோடுகள் வழியேச் செல்லக்கூடிய தளம்] :

$\vec{r} = \vec{a}_1 + t\vec{u}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{a}_2 + s\vec{v}$ என்பவை தளத்தின் மீது அமைந்த நேர்க்கோடுகள் என்க. இவ்வாறாயின்

$\vec{r} - \vec{a}_1,\ \vec{u},\ \vec{v}$ ஒரே-தள-வெக்டர்கள் ஆகும் மற்றும் $\vec{r} - \vec{a}_2,\ \vec{u},\ \vec{v}$ ஒரே-தள-அமை வெக்டர்கள் ஆகும்.

$\therefore \left[\vec{r} - \vec{a}_1\ \vec{u}\ \vec{v}\right] = 0$ மற்றும் $\left[\vec{r} - \vec{a}_2\ \vec{u}\ \vec{v}\right] = 0$

மேற்கண்ட இரண்டு சமன்பாடுகளுமே தேவையான ஒரே தளத்தைக் குறிக்கின்றன. இதன் கார்டீசியன் அமைப்பானது

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$ அல்லது $\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

இங்கு $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$; $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{u} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$; $\vec{v} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$

குறிப்பு : இரண்டு கோடுகள் இணையாயின் அவற்றிலிருந்து இரண்டு வெளிப்படையான புள்ளிகளையும் இணை வெக்டரையும் எடுத்துக் கொள்க. இனி அவ்விரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதும் வெக்டருக்கு இணையாக இருப்பதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2.57 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ மற்றும் $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ ஆகிய நேர்க்கோடுகளை உள்ளடக்கிய தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

முதல் கோட்டிலிருந்து $(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3)$ என்ற வெளிப்படையான புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

இணை வெக்டர்கள் $(l_1, m_1, n_1) = (2, 3, 4)$ மற்றும் $(l_2, m_2, n_2) = (5, 2, 1)$

தேவையான சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 5x - 18y + 11z - 2 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.58 : $(1, 1, -1)$ மற்றும் $(-1, 0, 1)$ ஆகிய புள்ளி வழியே செல்லக்கூடிய நேர்க்கோடு xy தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு : $(1, 1, -1)$ மற்றும் $(-1, 0, 1)$ வழியேச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$

அது xy தளத்தை சந்திப்பதால் $z = 0$ ஆகும்.

$\therefore \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{1}{-2} \Rightarrow x = 0, \; y = \frac{1}{2}$

$\therefore$ தேவையானப் புள்ளி $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

எடுத்துக்காட்டு 2.59 :

$\vec{r} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$ என்ற கோடு

$\vec{r} \cdot \left(2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\right) = 3$ என்ற தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

தீர்வு : கோட்டின் கார்டீசியன் வடிவம் $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{4} = \lambda$ என்க

$\therefore$ இந்த கோட்டிலுள்ள ஏதேனும் புள்ளியின் அமைப்பு $(2\lambda + 1, -3\lambda + 2, \; 4\lambda - 5)$ ஆகும்.

தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $2x + 4y - z - 3 = 0$

தேவையானப் புள்ளி தளத்தின் மீது அமைவதால்

$\therefore\ 2(2\lambda + 1) + 4(-3\lambda + 2) - (4\lambda - 5) - 3 = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1$

$\therefore$ தேவையானப் புள்ளி $(3, -1, -1)$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.9

(1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{4}$ மற்றும் $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 8$ என்ற கோடுகளை உள்ளடக்கிய தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(2) $\vec{r} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}\right)$ மற்றும் $\vec{r} = \left(3\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}\right) + s\left(-2\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}\right)$ என்ற இரு கோடுகள் வழியே ஒரு தளம் வரைய இயலுமா? உனது விடைக்குத் தகுந்த விளக்கம் தருக.

(3) $\vec{r} = \left(\vec{j} - \vec{k}\right) + s\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$ மற்றும் xz – தளம் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

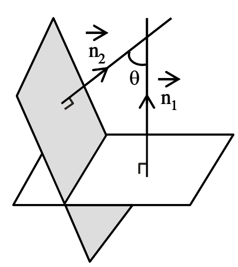
(4) $\vec{r} = \left(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$ என்ற கோடும் $x - 2y + 3z + 7 = 0$ என்ற தளமும் சந்திக்கின்ற புள்ளியைக் காண்க.

(5) ஆதிக்கும் $\vec{r} \cdot \left(2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}\right) = 7$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்டத் தூரத்தைக் காண்க.

(6) $x - y + 3z + 5 = 0$; $2x - 2y + 6z + 7 = 0$ என்ற இணைத்தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

2.7.9 தரப்பட்ட தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் :

இரண்டு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமானது அவற்றின் செங்குத்துக்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமாக வரையறுக்கப்படுகிறது.



படம் 2.32

$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = q_1$ மற்றும் $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = q_2$ என்பவை இரு தளங்களின் சமன்பாடுகள் (இங்கு $\vec{n}_1$ மற்றும் $\vec{n}_2$ என்பவை தளங்களுக்குரிய செங்குத்துக்கள்)

θ என்பது இவ்விரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம். (i.e., செங்குத்துகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்) எனில்

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}\right]$$

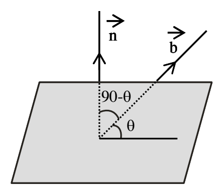
***குறிப்பு* :** (i) *அவ்விரு தளங்களும் செங்குத்தாயின்* $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

(ii) *அவ்விரு தளங்கள் இணையாயின்* $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2$ *இங்கு* t *என்பது திசையிலி.*

2.7.10 ஒரு கோட்டிற்கும் ஒரு தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் :

ஒரு கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணமானது அக்கோட்டிற்கும், தளத்தின் செங்குத்துக்கும் இடைப்பட்ட மிகைநிரப்பிக் கோணம் ஆகும்.

$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ *என்பது கோட்டின் சமன்பாடு என்க.* $\vec{r} \cdot \vec{n} = q$ *என்பது தளத்தின் சமன்பாடு என்க.*



படம் 2.33

கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ *எனில்,* (90 – θ) *ஆனது கோட்டிற்கும் தளத்தின் செங்குத்துக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும்.*

i.e., (90 – θ) *ஆனது* $\vec{b}$ *மற்றும்* $\vec{n}$ *க்கு இடைப்பட்ட கோணம்.*

$$\therefore \cos(90° - \theta) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|}\right)$$

***குறிப்பு* :** *கோடானது தளத்திற்கு இணை எனில்* i.e., *தளத்தின் செங்குத்தானது கோட்டிற்கு செங்குத்தாக அமையுமாயின்* $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ *ஆகும்.*

***எடுத்துக்காட்டு 2.60* :** $2x - y + z = 4$ *மற்றும்* $x + y + 2z = 4$ *என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.*

***தீர்வு* :** *கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் செங்குத்துகள்*

$\vec{n}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $\vec{n}_2 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ தளங்களின் இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.61 : $\vec{r} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) + \mu\left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)$ என்ற கோட்டிற்கும் $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}\right) = 0$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு: θ என்பது கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்டக் கோணம் என்க.

$$\sin\theta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\ ;\ \vec{n} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\sin\theta = \frac{16}{3\times 7} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$$

பயிற்சி 2.10

(1) பின்வரும் தளங்களுக்கு இடைப்பட்டக் கோணம் காண்க.

(i) $2x + y - z = 9$ மற்றும் $x + 2y + z = 7$

(ii) $2x - 3y + 4z = 1$ மற்றும் $-x + y = 4$

(iii) $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = 7$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\left(\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 10$

(2) $\vec{r}\cdot\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = 15$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\left(\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}\right) = 3$ என்ற தளங்கள் செங்குத்தானவை எனக்காட்டுக.

(3) $\vec{r}\cdot\left(2\vec{i} + \lambda\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 10$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\left(\lambda\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\right) = 5$ என்ற தளங்கள் செங்குத்து எனில் λ காண்க.

(4) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ என்ற கோட்டிற்கும் $3x + 4y + z + 5 = 0$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

(5) $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} + \lambda\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ என்ற கோட்டிற்கும் $\vec{r}\cdot\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = 1$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

2.8 கோளம் (Sphere) :

ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து மாறாத தூரத்தில் புறவெளியில் இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு கோளமாகும்.

நிலையானப் புள்ளியை கோளத்தின் மையம் எனவும், மாறாத தூரத்தை கோளத்தின் ஆரம் எனவும் அழைப்பர்.

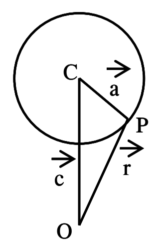
குறிப்பு : பாடத்திட்டத்தின்படி சமன்பாட்டு வரைமுறைகள் (2.8.1, 2.8.2) தேவையில்லை. சமன்பாட்டின் அமைப்பு மட்டுமே தேவை. இருப்பினும், கற்றல் திறனை அதிகரிக்கும் நோக்குடன் சமன்பாட்டின் வரைமுறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

2.8.1 நிலை வெக்டர் $\vec{c}$ -ஐ மையமாகவும் ஆரம் aஆகவும் கொண்ட கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு :

O-ஐப் பொறுத்து (ஆதியாகக் கொண்டு) மையம் C-இன் நிலை வெக்டர் $\vec{c}$ என்க.

(i.e.,) $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

கோளத்தின் மீது ஏதேனும் ஓர் புள்ளி P அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க.



படம் 2.34

(i.e.,) $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

கோளத்தின் ஆரம் a எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (i.e.,) $\overrightarrow{CP} = \vec{a}$

படம் (2.34)இலிருந்து $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{a}$$

$$\vec{r} - \vec{c} = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{r} - \vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \qquad \ldots (1)$$

இதுவே கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

கொள்கை : மையம் ஆதியாகவும், ஆரம் a-ஆகவும் கொண்ட கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

மையம் C ஆதியில் அமைவதால் $\vec{c} = \vec{o}$ எனவே, சமன்பாடு (1)-இல் $\vec{c} = \vec{o}$ எனப் பிரதியிட, கோளத்தின் சமன்பாடு $|\vec{r}| = |\vec{a}|$

கார்டீசியன்வடிவம் : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும்

$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ என்க

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{c} = (x - c_1)\vec{i} + (y - c_2)\vec{j} + (z - c_3)\vec{k}$$

$$(1) \Rightarrow |\vec{r} - \vec{c}|^2 = a^2 \quad \ldots (2)$$

(2)-இலிருந்து $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = a^2$ … (3)

இதுவே மையம் (c_1, c_2, c_3)-யும் ஆரம் a-ம் உடைய கோளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.

கொள்கை : மையம் ஆதியாக இருந்தால் சமன்பாடு (3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற வடிவில் அமையும். இதுவே கோளச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவம் ஆகும்.

குறிப்பு : கோளத்தின் பொது வடிவச் சமன்பாடு (General Equation of a Sphere) :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ என்ற சமன்பாடு $(-u, -v, -w)$-ஐ மையமாகவும் $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட கோளத்தைக் குறிக்கும்.

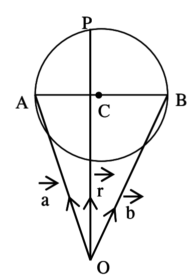
குறிப்பு : (i) x^2, y^2, z^2-இன் கெழுக்கள் சமம்.

(ii) சமன்பாட்டில் xy, yz, zx என்ற உறுப்புகள் காணப்படாது.

2.8.2 விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் கோளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் :

AB என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் ஆதியைப் பொறுத்து முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்க.

(i.e.,) $\vec{OA} = \vec{a}$ மற்றும் $\vec{OB} = \vec{b}$



படம் 2.35

கோளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P. அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க. (i.e.,) $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \vec{r} - \vec{b}$$

விட்டம் ABஆனது P-ஐ செங்கோணத்தை உருவாக்கும் என நமக்குத் தெரியும்.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{r} - \vec{a}\right) . \left(\vec{r} - \vec{b}\right) = 0 \qquad \ldots (1)$$

இதுவே கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு.

கார்டீசியன் அமைப்பு :

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ என்பன விட்டம் AB-இன் முனைப்புள்ளிகள்.

கோளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P\ (x, y, z)$ என்க.

இங்கு $\quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$; $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

(1)–இலிருந்து $\left(\vec{r} - \vec{a}\right) . \left(\vec{r} - \vec{b}\right) = 0$

$$\left[\left(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}\right) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})\right] . \left[\left(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}\right) - (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})\right] = 0$$

$$\left[(x - x_1) \vec{i} + (y - y_1) \vec{j} + (z - z_1) \vec{k}\right] . \left[(x - x_2) \vec{i} + (y - y_2) \vec{j} + (z - z_2) \vec{k}\right] = 0$$

$$\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

இதுவே விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் வழியாக எழுதப்படும் தேவையான கோளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.62 : மையம் $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் ஆரம் 3 உடைய கோளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் காண்க.

தீர்வு : மையம் $\vec{c}$-ம் ஆரம் $\vec{r}$ உடைய கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\left|\vec{r} - \vec{c}\right| = a$$

இங்கு $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $a = 3$

$\therefore$ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\left|\vec{r} - \left(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)\right| = 3$

கார்டீசியன் சமன்பாடு :

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ஐ பிரதியிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\left[\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) - \left(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)\right] = 3$$

$$\left|(x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}\right| = 3$$

$$\Rightarrow \left|(x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}\right|^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.63 : (5, 5, 3) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் (1, 2, 3) மையமாகவும் அமையும் கோளத்தின் வெக்டர் மற்றும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\text{ஆரம்} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2 + (3-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

இங்கு $a = 5$ மற்றும் $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$\therefore$ கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\left|\vec{r} - \vec{c}\right| = a$$

$$\left[\vec{r} - \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\right] = 5 \qquad \ldots (1)$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

(1)இலிருந்து

$$\left|\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) - \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\right| = 5$$

$$\left|(x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}\right| = 5$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.64 : $2\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ எனும் வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் முறையே A, B. இதனை இணைக்கும் புள்ளிகளை விட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு தருக.

தீர்வு **:** கோளத்தின் சமன்பாடு $\left(\vec{r} - \vec{a}\right) . \left(\vec{r} - \vec{b}\right) = 0$

இங்கு $\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

தேவையான சமன்பாடு

$$\left[\left(x\vec{i}+y\vec{j} + z\vec{k}\right)-\left(2\vec{i}+6\vec{j}-7\vec{k}\right)\right].\left[\left(x\vec{i}+y\vec{j} + z\vec{k}\right)-\left(2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}\right)\right]= 0$$

$$\left[(x-2)\vec{i} + (y-6)\vec{j} + (z+7)\vec{k}\right] . \left[(x-2)\vec{i}+(y+4)\vec{j}+(z-3)\vec{k}\right] = 0 \quad \ldots(1)$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு **:**

(1)இலிருந்து

$(x-2)(x-2) + (y-6)(y+4) + (z+7)(z-3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 41 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.65 : $\vec{r}^2 - \vec{r} . \left(8\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}\right) - 50 = 0$ என்ற வெக்டர் சமன்பாட்டையுடைய கோளத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

தீர்வு **:** $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

$$\vec{r}^2 - \vec{r} . \left(8\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}\right) - 50 = 0$$

$$\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 10z - 50 = 0$$

இங்கு $2u = x$-இன் கெழு $= -8 \Rightarrow u = -4$

$2v = y$-இன் கெழு $= 6 \Rightarrow v = 3$

$2w = z$-இன் கெழு $= -10 \Rightarrow w = -5$

மையம் : $(-u, -v, -w) = (4, -3, 5)$

ஆரம் : $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = \sqrt{16 + 9 + 25 + 50} = \sqrt{100} = 10$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.66 : நாண் AB ஆனது $\left|\vec{r} - \left(2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}\right)\right| = \sqrt{\mathbf{18}}$ என்ற கோளத்தின் விட்டமாகின்றது A-இன் ஆயத்தொலைகள் $(3, 2, -2)$ எனில் B-இன் அச்சுத்தூரங்கள் காண்க.

தீர்வு : கோளத்தின் சமன்பாடு $\left|\vec{r} - \left(2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}\right)\right| = \sqrt{18}$

$\Rightarrow$ கோளத்தின் மையம் (2, 1, – 6)

(i.e.,) மையத்தின் நிலை வெக்டர் $2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$

விட்டம் *AB*-இன் மையப்புள்ளி மையம் எனத் தெரிந்ததே.

A-இன் ஆயத்தொலைகள் (3, 2, – 2) மற்றும் *B*-இன் ஆயத்தொலைகள் (α, β, γ) என்க.

$$\therefore (2, 1, -6) = \left(\frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-2}{2}\right)$$

$\Rightarrow \alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = -10$

$\therefore$ *B*-இன் ஆயத்தொலைகள் (1, 0, – 10) ஆகும்.

பயிற்சி 2.11

(1) $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ எனும் நிலை வெக்டரை மையமாகவும் 4 அலகுகளை ஆரமாகவும் கொண்ட கோளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடுகளைக் காண்க, மற்றும் இதன் கார்டீசியன் வடிவத்தையும் காண்க.

(2) $2\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$ மற்றும் $-2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ எனும் நிலை வெக்டர்களையுடைய புள்ளிகள் முறையே *A*, *B* ஆகும். இவற்றை இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க, மேலும் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

(3) (1, –1, 1)-ஐ மையமாகவும் $\left|\vec{r} - \left(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)\right| = 5$ என்ற கோளத்தின் ஆரத்திற்கு சமமான மதிப்பை ஆரத்தைக் கொண்ட கோளத்தின் வெக்டர் மற்றும் சமன்பாடுகளைத் தருக.

(4) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 2z - 15 = 0$ என்ற கோளத்தின் விட்டம் *AB* மற்றும் *A*-இன் ஆயத்தொலைகள் (– 1, 4, – 3) எனில் *B*-இன் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

(5) பின்வரும் கோளங்களின் மையம், ஆரம் காண்க.

(i) $\left|\vec{r} - \left(2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\right)\right| = 5$

(ii) $\left|2\vec{r} + \left(3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\right)\right| = 4$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 2z = 5$

(iv) $\vec{r}^{\,2} - \vec{r} \cdot \left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}\right) - 11 = 0$

(6) கோளத்தின் விட்டம், மேற்பரப்பில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணம் செங்கோணம் எனக் காட்டு.

3. கலப்பெண்கள்
(COMPLEX NUMBERS)

3.1 அறிமுகம் :

தற்போது நாம் காணும் எண் தொகுப்பு இயல் எண்களிலிருந்து முழு எண்களும், முழு எண்களிலிருந்து விகிதமுறு எண்களும் விகிதமுறு எண்களிலிருந்து மெய்யெண்களுமாக விரிவுபடுத்தப்பட்டு உருவாக்கப்பட்டதாகும்.

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புச் சமன்பாடுகளைக் கருத்தில் கொள்க.

(i) $x - 1 = 0$, (ii) $x + 1 = 0$, (iii) $x + 1 = 1$, (iv) $2x + 1 = 0$ மற்றும் (v) $x^2 - 3 = 0$. இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் மெய்யெண் தீர்வு உண்டு என்பதைக் காண்கிறோம். எனினும் இம்மெய்யெண்களின் தொகுப்பானது $x^2 + 9 = 0$ போன்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காணப் போதுமானது அல்ல. இதுபோன்ற சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகளைக் காணவும், நமது கணிதச் செயற்பாடுகளின் தேவைகளுக்காகவும், மெய்யெண்களின் தொகுப்பிலிருந்து மற்றொரு எண் தொகுப்பு, அதாவது குறை எண்களுக்கும் வர்க்கமூலம் காணமுடியக் கூடிய ஒரு எண் அமைக்க வேண்டியுள்ளது.

$x^2 + 16 = 0$ என்ற எளிதான ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் தீர்வுகள் $x = \pm 4\sqrt{-1}$ ஆகும். இங்கு (-1)-இன் வர்க்கமூலத்தை i என்ற குறியீட்டால் குறிப்பர். இதுவே கற்பனை அலகு ஆகும். a மற்றும் b என்ற ஏதேனும் இரு மெய்யெண்களைக் கொண்டு $a + ib$ என்ற ஒரு புதிய எண்ணை உருவாக்கலாம். இந்த எண்ணை கலப்பு எண் என்கின்றோம். இவ்வாறாகவுள்ள எல்லா கலப்பெண்களின் கணம் $\mathbb{C}$ என்று குறிப்பிடுவோம். கலப்பெண்ணின் அமைப்பை அறிமுகப்படுத்தியவர் C.F. காஸ் (C.F.Gauss) என்ற ஒரு ஜெர்மன் கணிதமேதையாவர். மெய்யெண்களின் விரிவாக்கமானது எந்த ஒரு பல்லுறுப்புச் சமன்பாட்டுக்கும் தீர்வுகாண பயன்படுகிறது. 'i'என்ற குறியீடானது தலைசிறந்த சுவிஸ் கணிதமேதை லெனார்ட் யூலர் (Leonhard Euler) (1707 – 1783) என்பவரால் கணிதத்தில் 1748-இல் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. 'i' ஆனது "imaginarius" என்ற லத்தீன் வார்த்தையின் முதல் எழுத்தாகும். 'iota' என்ற கிரேக்க எழுத்தைக் குறிப்பதாகவும் கொள்ளலாம். பின்னர் கோஷி (A.L. Cauchy), ரீமாண் (B.Riemann), வெயர்ஸ்ட்ராஸ் (K. Weierstrass) போன்றவர்களின் படைப்பினால் இப்பாடப்பகுதி மேலும் சிறப்படைந்துள்ளது.

3.2 கலப்பெண் தொகுப்பு (The complex number system) :

எந்தவொரு கலப்பு எண்ணும் $a + ib$ என்ற வடிவில் குறிக்கப்படுகின்றது. இதில் 'a' மற்றும் 'b' மெய்யெண்கள் ஆகும். 'i' என்பது கற்பனை அலகு என அழைக்கப்படும். மேலும் $i^2 = -1$. $z = a + ib$ எனில் a என்பது z-இன் மெய் பகுதி. இதனை $Re(z)$ எனவும் b என்பது z-இன் கற்பனைப் பகுதி. இதனை $Im(z)$ எனவும் குறிக்கின்றோம்.

கலப்பெண்களின் சில எடுத்துக்காட்டுகள் $3 - i2,\ \sqrt{2} + i3,\ -\frac{2}{5} + i.$

இங்கு $3 - i2$வின் மெய்ப்பகுதி 3 மற்றும் கற்பனைப் பகுதி -2. இதே போல் மற்றவைக்கும் காணலாம்.

$a + ib,\ c + id$ என்ற இரு கலப்பெண்கள் சமம் எனில் $a = c$ மற்றும் $b = d$. இதன் மறுதலையும் உண்மை. மெய்யெண் கணத்தை கலப்பு எண் கணத்தின் உட்கணமாகக் கொள்ளலாம். இங்கு $b = 0$. எனவே $0 + i0$ மற்றும் $-2 + i0$ என்ற கலப்பெண்களானவை முறையே 0 மற்றம் -2 என்கிற மெய்யெண்களைக் குறிக்கின்றன. மேலும் $0 + ib$ அல்லது ib என்ற கலப்பு எண் ஆனது ஒரு முழுமையான கற்பனை எண்ணாகும்.

கலப்பு எண்ணுக்குரிய குறை எண் (Negative of a complex number) :

$z = a + ib$ என்பது ஒரு கலப்பு எண் எனில் அதன் குறை $-z$ எனக் குறிக்கப்படும். மேலும் $-z = -a + i(-b)$ என்று வரையறுக்கப்படுகின்றது.

அடிப்படைக் கணிதச் செயல்பாடுகள் (Basic Algebraic operations) :

கூட்டல் : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

கழித்தல் : $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

பெருக்கல் : $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

கலப்பெண்களின் செயல்பாடுகளை மெய்யெண்களின் செயல்பாடுகளைப் போலவே செயல்படுத்துக. அதில் i^2 வரும் இடங்களில் i^2 க்குப் பதிலாக (-1) பிரதியிடுக.

3.3 இணைக் கலப்பெண் (Conjugate of a complex number) :

$z = a + ib$ எனில் z-இன் இணைக் கலப்பெண் $\bar{z} = a - ib$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

வகுத்தல் : $$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \times \frac{c - id}{c - id}$$

பகுதியின் இணை எண்ணால் பகுதியையும் தொகுதியையும் பெருக்க,

$$\frac{a + ib}{c + id} = \left[\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right] + i\left[\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right]$$

3.3.1 பண்புகள் (Properties) :

(i) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ என்பது குறையற்ற மிகை மெய்யெண்.

(ii) $\bar{z}$ -இன் இணையெண் z அதாவது $\bar{\bar{z}} = z$

(iii) z என்பது மெய் எண் i.e., $b = 0$ எனில் $z = \bar{z}$ ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை. (அ.து.), $z = \bar{z}$ எனில், $a + ib = a - ib$
$\therefore\ b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$(\because 2 \neq 0)\ \therefore\ b = 0 \Rightarrow z$ ஒரு மெய்யெண்.

(iv) $z = a + ib$ எனில் $\bar{z} = a - ib$

$\therefore\ z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$

$\Rightarrow a = Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

இதேபோல் $b = Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

(v) இரு கலப்பெண்களின் கூடுதலின் இணை எண் ஆனது அவ்விரு எண்களின் இணை எண்களின் கூடுதலாகும். $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

நிரூபணம் :

$$z_1 = a + ib \text{ மற்றும் } z_2 = c + id \text{ எனில்}$$

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d)$$

$$\overline{z_1} = a - ib,\quad \overline{z_2} = c - id$$

$$\text{ஆகவே } \overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - ib) + (c - id) = (a + c) - i(b + d)$$

$$= \overline{z_1 + z_2}$$

இதைப் போலவே, இரு கலப்பெண்களின் வித்தியாசங்களின் இணை எண் ஆனது அவ்விரு எண்களின் இணை எண்களின் வித்தியாசம் எனக் காட்டலாம்.

i.e., $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(vi) இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கலின் இணையெண் என்பது இவ்விரு எண்களின் இணையெண்களின் பெருக்கலாகும்.

i.e., $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

நிரூபணம் : $z_1 = a + ib$ மற்றும் $z_2 = c + id$. எனில்

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

$$\overline{z_1} = a - ib, \quad \overline{z_2} = c - id$$

$$\overline{z_1}\ \overline{z_2} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

$$= \overline{z_1 z_2}$$

(vii) இரு கலப்பெண்கள் $z_1, z_2, (z_2 \neq 0)$-வின் வகுத்தலின் இணை எண் என்பது அவ்விரு கலப்பெண்களின் இணை எண்களின் வகுத்தலாகும். (நிரூபணமின்றி)

$$\text{i.e.,} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

(viii) $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

எடுத்துக்காட்டு 3.1 : கீழ்க்கண்ட எண்களை கலப்பெண்கள் வடிவில் எழுதுக.

(i) $\sqrt{-35}$ (ii) $3 - \sqrt{-7}$

தீர்வு :

(i) $\sqrt{-35} = \sqrt{(-1) \times (35)} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{35} = i\sqrt{35}$

(ii) $3 - \sqrt{-7} = 3 - \sqrt{(-1) \times 7} = 3 - \sqrt{-1}\sqrt{7} = 3 - i\sqrt{7}$

எடுத்துக்காட்டு 3.2 : பின்வரும் கலப்பெண்களின் மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைக் காண்க.

(i) $4 - i\sqrt{3}$ (ii) $\frac{3}{2}\, i$

தீர்வு :

(i) $z = 4 - i\sqrt{3}$ என்க ; $Re(z) = 4, \; Im(z) = -\sqrt{3}$

(ii) $z = \frac{3}{2}\, i$ என்க ; $Re(z) = 0, \; Im(z) = \frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 3.3 : பின்வரும் கலப்பெண்களின் இணை எண்களைக் காண்க *:*

(i) $2 + i\sqrt{7}$, (ii) $-4 - i9$ (iii) $\sqrt{5}$

தீர்வு :

வரையறையின்படி ஒரு கலப்பெண்ணின் இணையானது கற்பனைப் பகுதியின் குறியை மாற்றுவதன் மூலம் கிடைப்பதாகும். எனவே தேவையான இணை எண்கள் (i) $2 - i\sqrt{7}$, (ii) $-4 + i9$ *மற்றும்* (iii) $\sqrt{5}$ ($\because$*ஒரு மெய்யெண்ணின் இணை அதுவே ஆகும்.*).

எடுத்துக்காட்டு 3.4 : *பின்வருவனவற்றை* $a + ib$ *என்ற திட்டவடிவில் எழுதுக.*

(i) $(3 + 2i) + (-7 - i)$ (ii) $(8 - 6i) - (2i - 7)$

(iii) $(2 - 3i)(4 + 2i)$ (iv) $\dfrac{5 + 5i}{3 - 4i}$

தீர்வு :

(i) $(3 + 2i) + (-7 - i) = 3 + 2i - 7 - i = -4 + i$

(ii) $(8 - 6i) - (2i - 7) = 8 - 6i - 2i + 7 = 15 - 8i$

(iii) $(2 - 3i)(4 + 2i) = 8 + 4i - 12i - 6i^2 = 14 - 8i$

(iv) $$\frac{5 + 5i}{3 - 4i} = \frac{5 + 5i}{3 - 4i} \times \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{15 + 20i + 15i + 20i^2}{3^2 + 4^2}$$

$$= \frac{-5 + 35i}{25} = \frac{-1}{5} + \frac{7}{5}i$$

குறிப்பு : $i^4 = 1$

$i^3 = -i$

$i^2 = -1$

$(i)^{4n} = 1$

$(i)^{4n-1} = -i$

$(i)^{4n-2} = -1$; $n \in z$

எடுத்துக்காட்டு 3.5 : *பின்வரும் கலப்பெண்ணின் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைக் காண்க* ***:*** $z = \dfrac{3i^{20} - i^{19}}{2i - 1}$

தீர்வு :

$$z = \frac{3i^{20} - i^{19}}{2i - 1} = \frac{3(i^2)^{10} - (i^2)^9 i}{2i - 1}$$

$$= \frac{3(-1)^{10} - (-1)^9 i}{-1 + 2i}$$

$$= \frac{3+i}{-1+2i}$$

$$= \frac{3+i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i}$$

$$= \frac{-3-6i-i-2i^2}{(-1)^2+2^2}$$

$$= \frac{-1-7i}{5} = \frac{-1}{5} - \frac{7}{5}\, i$$

$Re(z) = -\frac{1}{5}$ மற்றும் $Im(z) = \frac{-7}{5}$

***எடுத்துக்காட்டு** 3.6 :* $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ *மற்றும்* $z_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ *எனில் பின்வருவனவற்றின் இணை எண்களைக் காண்க.* (i) $z_1 z_2$ (ii) $(z_3)^4$

தீர்வு :

(i) $z_1 z_2$ வின் இணை எண் $\overline{z_1 z_2}$

i.e. $\overline{(2+i)(3-2i)} = \overline{(2+i)}\ \overline{(3-2i)}$

$$= (2-i)(3+2i)$$

$$= (2-i)(3+2i)$$

$$= 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 6 + 4i - 3i + 2$$

$$= 8 + i$$

(ii) $\overline{z_3{}^4} = \left(\overline{z_3}\right)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i}\right)^4$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{3}{4}\, i^2\right)^2$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i + \frac{3}{4}\, i^2$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

பயிற்சி 3.1

(1) பின்வருவனவற்றை $a + ib$ என்ற திட்ட வடிவில் எழுதுக.

(i) $\dfrac{2(i-3)}{(1+i)^2}$ (ii) $\dfrac{(1+i)(1-2i)}{1+3i}$

(iii) $(-3+i)(4-2i)$ (iv) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{3-2i^8-i^{10}-i^{15}}$

(2) பின்வரும் கலப்பெண்களின் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைக் காண்க :

(i) $\dfrac{1}{1+i}$ (ii) $\dfrac{2+5i}{4-3i}$ (iii) $(2+i)(3-2i)$

(3) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ எனில் n-இன் மீச்சிறு மிகை முழு எண் மதிப்பைக் காண்க.

(4) பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் x மற்றும் y-யின் மெய் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $(1-i)x + (1+i)y = 1-3i$

(ii) $\dfrac{(1+i)x-2i}{3+i} + \dfrac{(2-3i)y+i}{3-i} = i$

(iii) $\sqrt{x^2+3x+8} + (x+4)i = y(2+i)$

(5) $-3 + ix^2y$ மற்றும் $x^2 + y + 4i$ ஆகிய இரு கலப்பெண்களும் ஒன்றுக்கொன்று இணையெனில் x மற்றும் y–இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

3.4 கலப்பெண்களை வரிசையிட்டச் சோடிகளாக எழுதுதல் (Ordered pair Representation) :

கலப்பெண்களை மாற்று வடிவில் எழுதும்பொழுது வரிசையிட்ட சோடியாக எழுதும் முறை சாலச் சிறந்ததாகும். $a + ib$ என்ற கலப்பு எண்ணின் வரிசையிட்ட சோடி (a, b)-யில் a மற்றும் b மெய்யெண்கள். இவை சில செயற்பாடுகளின் வரையறைகளுக்கு உட்பட்டு அமைகின்றன. அவ்வரையறைகள் பின்வருமாறு:

(i) சமத்தன்மை : $(a, b) = (c, d)$ எனில் $a = c,\ b = d$

(ii) கூட்டல் : $(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$

(iii) பெருக்கல் : $(a, b)\,.\,(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

$m(a, b) = (ma, mb)$

முடிவு :

கற்பனை அலகு i-ஐ $i = (0, 1)$ என வரையறுக்கலாம்.

எனவே $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$

மேலும் $(0, 1)\ (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$.

$(1, 0)$ஐ 1 எனவும் $(0, 1)$ஐ i எனவும் கண்டுகொள்ள, $(a, b) = a + ib$ என கிடைக்கின்றது.

எனவே $a + ib$ என்ற கலப்பெண்ணை வரிசையிட்ட சோடி (a, b)-யுடன் ஒப்பிடலாம். வரிசையிட்ட சோடி $(0, 0)$ஆனது 0 என்ற மெய்யெண்ணுக்கு உரியதாகும்.

மேற்குறிப்பு :

மெய்யெண்களின் கணம் வரிசைப்படுத்தப்பட்டிருப்பினும் கலப்பெண்களின் கணம் வரிசைப்படுத்தப்படவில்லை. அதாவது ℂயில் வரிசைத் தொடர்பு கிடையாது. z_1 மற்றும் z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களை $z_1 < z_2$ அல்லது $z_1 > z_2$ என்று கூற இயலாது. இங்கு $z_1 = z_2$ அல்லது $z_1 \neq z_2$ என்றே கூற இயலும். ஏனெனில் இக்கலப்பெண்கள் தளத்திலுள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. ஆகவே ‘பெரியது’ மற்றும் ‘சிறியது’ என்கின்ற வரிசைத் தொடர்புகள் கலப்பெண்களில் வரையறுக்கப்படவில்லை. அதாவது $1 + i > 3 - 2i$, $i > 0$, $(3 + i) < 2$ போன்ற சமனின்மைகள் அர்த்தமற்றவை.

3.5 கலப்பெண்ணின் மட்டு (Modulus of a complex number) :

$z = a + ib$ ஒரு கலப்பெண் என்க. அதன் மட்டு அல்லது எண்ணளவு என்பது $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. வரையறையிலிருந்து $|\bar{z}| = |z|$. மேலும் $a^2 + b^2 = z\bar{z}$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ (மிகை வர்க்கமூலம் காண)

குறிப்பு : $z = x + iy$ என்க.

இப்பொழுது , $x < \sqrt{x^2 + y^2}$, $Re(z) < |z| \quad y \neq 0$ … (1)

$y = 0$ எனில் $x = |z|$, $Re(z) = |z|$ … (2)

(1), (2) இவற்றிலிருந்து $\boxed{Re(z) \leq |z|}$

அதே போல் $\boxed{Im(z) \leq |z|}$

எடுத்துக்காட்டு 3.7 : பின்வரும் கலப்பெண்களுக்கு மட்டு காண்க :

(i) $-2 + 4i$ (ii) $2 - 3i$ (iii) $-3 - 2i$ (iv) $4 + 3i$

தீர்வு :

(i) $|-2+4i| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(ii) $|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

(iii) $|-3-2i| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

(iv) $|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

3.5.1. பண்புகள் **(Properties) :**

$z_1, z_2, \ldots z_m$ *என்பன கலப்பெண்கள் எனில் கீழ்க்கண்ட பண்புகள் பொருந்தும்.*

(i) *இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கற் பலனின் மட்டு அவற்றின் மட்டுகளின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமம்.*

i.e. $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$

நிரூபணம் : $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2}$ $\quad [\because z\overline{z} = |z|^2]$

$$= (z_1 z_2)\ \overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

$$= \left(z_1 \overline{z_1}\right)\left(z_2 \overline{z_2}\right)$$

$$= |z_1|^2\ |z_2|^2$$

இருபுறமும் மிகை வர்க்கமூலம் எடுக்க

$$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$$

குறிப்பு :

(i) *இந்த கொள்கையை ஒரு முடிவான எண்ணிக்கை உள்ள கலப்பெண்களுக்கு விரிவு செய்யலாம்.*

i.e., $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1|\,|z_2| \ \ldots\ |z_n|$

(ii) *இரு கலப்பெண்களின் வகுத்தலின் மட்டு, அவற்றின் மட்டுகளின் வகுத்தலுக்குச் சமம்.*

i.e., $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ இங்கு $z_2 \neq 0$.

நிரூபணம் : $z_2 \neq 0$ என்பதால் $z_1 = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) . z_2$ எனவே $|z_1| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|\ |z_2|$ (முந்தைய கொள்கையின்படி)

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

எனவே $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

(iii) *முக்கோணச் சமனிலி* :

இரு கலப்பெண்களின் கூடுதலின் மட்டு அவ்விரு எண்களின் மட்டுகளின் கூடுதலுக்குக் குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவுமே இருக்கும்.

i.e., $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

நிரூபணம் : z_1 *மற்றும்* z_2 *இரு கலப்பெண்கள் என்க.*

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \qquad [\because |z|^2 = z\bar{z}\ ]$$

$$= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| \qquad [\because Re\ (z) \leq |z|]$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\ |z_2| \qquad \because |\bar{z}| = |z|$$

$$= [\,|z_1 1 + |z_2|]^2$$

$$\therefore |z_1 + z_2|^2 \leq [|z_1| + |z_2|]^2$$

இருபுறமும் மிகை வர்க்கமூலம் எடுக்க $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

***குறிப்பு* : 1** z_2*க்குப் பதிலாக* $-z_2$ *பிரதியிட*

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

***குறிப்பு* : 2**

மேற்கண்ட சமனின்மை n *கலப்பெண்களுக்கு கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் விரிவாக்கலாம். (அ.து.)* $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ *எனும்* n *கலப்பெண்களுக்கு*

$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$

(iv) இரு கலப்பெண்களின் வித்தியாசங்களின் மட்டு என்பது அவ்விரு எண்களின் மட்டுகளின் வித்தியாசங்களைக் காட்டிலும் பெரியதாகவோ அல்லது சமமாகவுமே இருக்கும்.

நிரூபணம் : z_1 மற்றும் z_2 இரு கலப்பெண்கள் என்க.

$$| z_1 - z_2 |^2 = (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)} \qquad [\because | z |^2 = z\overline{z}\,]$$

$$= (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right)$$

$$= z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - 2\,Re\left(z_1\,\overline{z_2}\right)$$

$$\geq | z_1 |^2 + | z_2 |^2 - 2\,| z_1\,\overline{z}_2 | \qquad [\because \text{Re}\,(z) \leq | z | \;\; - \text{Re}\,(z) \geq -| z |]$$

$$= | z_1 |^2 + | z_2 |^2 - 2\,| z_1 |\;\; | \overline{z_2} |$$

$$= | z_1 |^2 + | z_2 |^2 - 2\,| z_1 |\;\; | z_2 |$$

$$= [\,| z_1| - | z_2 |]^2$$

$$\therefore | z_1 - z_2 |^2 \geq [| z_1 | - | z_2 |]^2$$

இருபுறமும் மிகை வர்க்கமூலத்தைக் காண,

$$| z_1 - z_2 | \geq | z_1 | - | z_2 |$$

எடுத்துக்காட்டு 3.8 : $\dfrac{(1 + 3i)(1 - 2i)}{(3 + 4i)}$-இன் மட்டு அல்லது எண்ணளவு காண்க.

தீர்வு :

$$\left|\frac{(1 + 3i)(1 - 2i)}{(3 + 4i)}\right| = \frac{| 1 + 3i |\;\; | 1 - 2i |}{| 3 + 4i |}$$

$$= \frac{\sqrt{1^2 + 3^2}\,\sqrt{1^2 + (2)^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{10}\,\sqrt{5}}{\sqrt{25}}$$

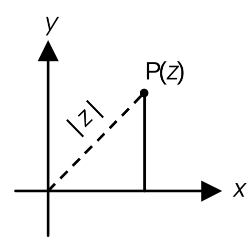
$$= \frac{\sqrt{10}\,\sqrt{5}}{5} = \sqrt{2}$$

3.6 வடிவக் கணித உருவமைப்பு (Geometrical Representation):

3.6.1 கலப்பெண்களின் வடிவக் கணித விளக்கம் (Geometrical meaning of a Complex Number) :

$X'OX$ மற்றும் $Y'OY$ (முறையே x அச்சு y அச்சு எனப்படும்), ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுக்களில் மெய்யெண் அளவுகோலை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த அச்சுக்கள் நிர்ணயிக்கும் தளத்தில் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் மெய் எண்களின் வரிசையிட்ட சோடியான (a, b)யால் அறியப்படலாம். இதை அப்புள்ளியின் செவ்வக ஆயத் தொலைவுகள் எனப்படும்.

ஒவ்வொரு கலப்பெண் $a + ib$யும் மெய்யெண்களைக் கொண்ட (a, b) என்ற வரிசையிட்ட சோடியால் குறிக்கப்படுவதால் இக்கலப்பெண்ணை xy தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி P-ஆல் குறிக்கலாம். இத்தளத்தை கலப்பெண் தளம் என்கிறோம். இவ்வாறான அமைப்பை ஆர்கன்ட் வரைபடம் எனவும் கூறலாம். எனவே, P என்ற கலப்பு எண்ணை (a, b) அல்லது $a + ib$. என படிக்கலாம்.



படம் 3.1

இவ்வாறான அமைப்பில் $z = a + ib$யின் மட்டு என்பது zக்கும் ஆதிக்கும் உள்ள தொலைவைக் குறிக்கின்றது. (அ.து,) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. கலப்பெண் $z = a + ib$ஐ வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ (படம். 3.1) எனவும் குறிக்கலாம். இங்கு $P = (a, b)$ மேலும் $|z|$-ஐ படத்தில் ஆதியிலிருந்து புள்ளி (a, b)வரை அம்புக் குறியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கலப்பு எண்ணுடனும் தளத்திலுள்ள ஒரே ஒரு புள்ளியைத் தொடர்பு படுத்தலாம். இதன் மறுதலையாக, தளத்திலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒரே ஒரு கலப்பு எண்ணை மட்டுமே தொடர்பு படுத்தலாம். இதனால் கலப்பெண் zஐ குறிக்கும்போது புள்ளி z எனுமாறு பெரும்பாலும் குறிக்கிறோம்.

தெளிவாக, மெய்யெண்களின் கணமான $\{(x, 0)\}$ என்பது மெய் அச்சான x-அச்சை குறிக்கின்றது. கற்பனை எண்களின் கணமான $\{(0, y)\}$ என்பது கற்பனை அச்சான y-அச்சைக் குறிக்கின்றது. கலப்பெண் $0 = 0 + i0$ ஆதியைக் குறிக்கின்றது.

3.6.2 கலப்பெண்ணின் துருவ வடிவம்
(Polar form of a Complex Number) :

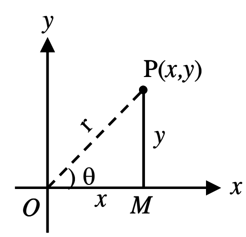
கலப்பெண் தளத்தில் கலப்பெண்ணான $z = x + iy$*-ஐ குறிக்கும் புள்ளி* $P = P(x, y)$*-இன் துருவ ஆயத்தொலைகள்* (r, θ) *என்க.*

ஆகவே (படம் 3.2)-யிலிருந்து

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} \text{ மேலும் } \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$x = r\cos\theta \ ; \ y = r\sin\theta$$

இங்கு $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ *என்பது* $z = x + iy$*-இன் மட்டு அல்லது எண்ணளவு ஆகும். (அ.து. ஆதிக்கும் புள்ளி* z*க்கும் உள்ள தொலைவு ஆகும்.)*



படம் 3.2

$\tan\theta = \frac{y}{x}$, $\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ *என்பது* $z = x + iy$*-இன் வீச்சு ஆகும். இதனை* amp z *அல்லது* arg z *எனக் குறிக்கலாம். மேலும்* θ *என்பது* x*-அச்சின் மிகைத் திசையுடன்* OP *எனும் கோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் ஆகும்.*

ஆகவே $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *என்பது கலப்பெண்ணின் துருவ வடிவம் அல்லது மட்டு வீச்சு வடிவம் ஆகும். சில நேரங்களில்* $\cos\theta + i\sin\theta$ *என்பதை* cis θ *எனச் சுருக்கமாக எழுதுவது வசதியாகும்.*

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ *என்பதனை முதல் கால் பகுதியிலுள்ள* x, y *மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். (அ.து.)* x*ம்* y*ம் மிகை எண்கள்.*

3.6.3 முதன்மை மதிப்பு (Principal Value) :

z*-இன் வீச்சு தனித்தன்மையுடையதல்ல.* θ*வின் எந்த இரு மதிப்புகளின் வேறுபாடும்* 2π*-இன் மடங்காக இருக்கும்* arg z*க்கு தனித்தன்மையுடைய ஒரே ஒரு மதிப்பை பெறுவதற்காக நாம் அதன் மதிப்பை ஒரு சிறிய இடைவெளியான* 2π *நீளத்திற்கு கட்டுப்படுத்திக் கொள்ளலாம். இதன் விளைவாக ஏற்பட்டதே வீச்சின் முதன்மை மதிப்பு.*

ஏதேனும் ஒரு $z \neq 0$*விற்கு* arg z*-இன் முதன்மை மதிப்பு என்பது,* $-\pi < \arg z \leq \pi$*ஐ நிறைவு செய்யக்கூடிய ஒருமைத் தன்மையுடைய* z*-இன் மதிப்பாகும்.*

குறிப்பு : $z = 0$*வின் வீச்சு நிர்ணயிக்கப்படவில்லை.*

முடிவுகள் :

(1) z_1 *மற்றும்* z_2 *என்ற இரு கலப்பெண்களுக்கு*

(i) $|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$ (ii) $\arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

***நிரூபணம்* :** $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *மற்றும்* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *என்க*

எனவே $|z_1| = r_1,\ \arg z_1 = \theta_1\ ;\ |z_2| = r_2,\ \arg z_2 = \theta_2$

$$z_1.z_2 = r_1r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) . (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2 [(\cos\theta_1 . \cos\theta_2 - \sin\theta_1 . \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 . \cos\theta_2 + \cos\theta_1 . \sin\theta_2)]$$

$$= r_1r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$\therefore\ |z_1 z_2| = r_1r_2 = |z_1| . |z_2|$ *மற்றும்*

$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

***குறிப்பு* :**

(1) *இந்தக் கொள்கையை எந்த ஒரு முடிவான எண்ணிக்கையுள்ள கலப்பெண்களுக்கும் விரிவு செய்யலாம். (அ.து.)*

(i) $|z_1 . z_2 \ldots z_n| = |z_1| . |z_2| \ldots |z_n|$

(ii) $\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n$

(2) z_1, z_2 *என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு*

(i) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ (z_2 \neq 0)$ (ii) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

***நிரூபணம்* :** $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *மற்றும்* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *என்க*

எனவே $|z_1| = r_1,\ \arg z_1 = \theta_1$ *மற்றும்* $|z_2| = r_2,\ \arg z_2 = \theta_2$

இங்கு $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\therefore \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ மற்றும்}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

கலப்பெண்ணின் அடுக்கு வடிவம்
(Exponential form of a Complex Number) :

$e^{i\theta}$ அல்லது exp ($i\theta$) எனக் குறிக்கப்படும் $i\theta$வின் அடுக்கு வடிவமானது $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இத்தொடர்பு **ஆய்லரின் சூத்திரம்** என அறியப்படுகின்றது.

$z \neq 0$ எனில்$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. இது கலப்பெண் z-இன் அடுக்கு வடிவம் எனப்படும். $e^{i\theta_1} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ மற்றும் $e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$இன் நேரடிப் பெருக்கல் மூலம் $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ அடைகிறோம்.

மேற்குறிப்புகள் :

(1) $\theta_1 = \theta$ மற்றும் $\theta_2 = -\theta$ எனில் மேற்கூறிய வரையறையின்படி
$e^{i\theta} . e^{i(-\theta)} = e^{i(\theta - \theta)} = e^{i0} = 1$
$\Rightarrow e^{i(-\theta)} = \frac{1}{e^{i\theta}}$. எனவே $e^{i(-\theta)}$வை $e^{-i\theta}$ என எழுத, $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ எனக் காண்கிறோம்.

(2) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ எனில் $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதலின் மூலம் $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ எனக் காட்டலாம்.

(3) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ என்பதால் $z = re^{i\theta}$ எனில் $\overline{z} = re^{-i\theta}$

(4) இரு கலப்பெண்கள் $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ மற்றும் $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ சமம் எனில் $r_1 = r_2$ மற்றும் $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$, $n \in Z$ (முழுக்களின் கணம்) இதன் மறுதலையும் உண்மை.

வீச்சு θவை காண்பதற்கான பொது விதி :

$z = x + iy$ என்க	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \alpha$
இங்கு $x, y \in R$	$\theta = -\pi + \alpha$	$\theta = -\alpha$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{|y|}{|x|}$

(i)	$\cos\theta$, $\sin\theta$, + v*e* எனில் z முதல் கால் பகுதியில் அமைகிறது,	$\theta = \alpha$
(ii)	$\sin\theta$ + v*e*, $\cos\theta$ – v*e* எனில் z இரண்டாம் கால் பகுதியில் அமைகிறது,	$\theta = \pi - \alpha$
(iii)	$\sin\theta$ – v*e*, $\cos\theta$ – v*e* எனில் z மூன்றாம் கால் பகுதியில் அமைகிறது,	$\theta = -\pi + \alpha$
(iv)	$\sin\theta$ – v*e* , $\cos\theta$ + v*e* எனில் z நான்காம் கால் பகுதியில் அமைகிறது,	$\theta = -\alpha$

எடுத்துக்காட்டு 3.9 : *பின்வரும் கலப்பெண்களின் மட்டு வீச்சு காண்க.*

(i) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ (ii) $1 + i\sqrt{3}$ (iii) $-1 - i\sqrt{3}$

தீர்வு :

(i) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில் மெய் கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட

$$r\cos\theta = -\sqrt{2} \qquad r\sin\theta = \sqrt{2}$$

$$r^2\cos^2\theta = 2 \qquad r^2\sin^2\theta = 2$$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$$

$$r = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta \text{ ஆனது 2ஆம் கால்பகுதியிலுள்ளது.}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

மட்டு $r = 2$, வீச்சு $\theta = \frac{3\pi}{4}$

எனவே $-\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(ii) $1 + i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட

$$r\cos\theta = 1 \qquad r\sin\theta = \sqrt{3}$$

$$r^2\cos^2\theta = 1 \qquad r^2\sin^2\theta = 3$$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta \text{ ஆனது 1ஆம்கால்பகுதியிலுள்ளது}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad \left[\because \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right]$$

மட்டு $r = 2$, *வீச்சு* $\theta = \frac{\pi}{3}$

எனவே $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(iii) $-1 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *என்க*

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட,

$r\cos\theta = -1 \qquad r\sin\theta = -\sqrt{3}$

$r^2\cos^2\theta = 1 \qquad r^2\sin^2\theta = 3$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$

$\Rightarrow \quad r = 2$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta \text{ ஆனது 3ஆம் கால் பகுதியில் உள்ளது}$$

$$\theta = -\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3}$$

மட்டு $r = 2$, *வீச்சு* $\theta = \frac{-2\pi}{3}$

எனவே $-1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

எடுத்துக்காட்டு 3.10 : $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \ldots (a_n + ib_n) = A + iB$ *எனில்*

நிரூபி : (i) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \ldots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \ldots + \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = k\pi + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right), k \in Z$

தீர்வு :

கொள்கை : $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \ldots (a_n + ib_n) = A + iB$

$|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \ldots (a_n + ib_n)| = |A + iB|$

$|(a_1 + ib_1)| \; |(a_2 + ib_2)| \ldots |(a_n + ib_n)| = |A + iB|$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\ \ldots\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

வர்க்கப்படுத்த

$$(a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2)\ \ldots\ (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$$

மேலும்

$$\arg\,[(a_1 + ib_1)\,(a_2 + ib_2)\ \ldots\ (a_n + ib_n)] = \arg\,(A + iB)$$

$$\arg\,(a_1 + ib_1) + \arg\,(a_2 + ib_2)\ \ldots + \arg\,(a_n + ib_n) = \arg\,(A + iB) \qquad \ldots (1)$$

இங்கு $\arg\ (a_i + ib_i) = \tan^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$

(1)-இலிருந்து

$$\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \ldots + \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

பொதுவாக,

$$\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \ldots + \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = k\pi + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right),\ k \in Z$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11 :

P என்னும் புள்ளி கலப்பு எண் மாறி zஐக் குறித்தால் Pஇன் நியமப் பாதையை பின்வரும் கட்டுபாடுகளுக்கு உட்பட்டு காண்க.

(i) $Re\left(\frac{z+1}{z+i}\right) = 1$ (ii) $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}$

தீர்வு :

$z = x + iy$ *என்க*

(i)

$$\frac{z+1}{z+i} = \frac{x+iy+1}{x+iy+i} = \frac{(x+1)+iy}{x+i(y+1)}$$

$$= \frac{[(x+1)+iy]}{x+i(y+1)} \times \frac{[x-i(y+1)]}{[x-i(y+1)]}$$

$$= \frac{x(x+1)+y(y+1)+i(yx-xy-x-y-1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+1)+y(y+1)+i(-x-y-1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$Re\left(\frac{z+1}{z+i}\right) = 1$$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \frac{x(x+1)+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+x+y = x^2+y^2+2y+1$$

$$\Rightarrow \quad x - y = 1$$ இது ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

$\therefore$ *P*யின் நியமப்பாதை ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

(ii) $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \arg(z-1) - \arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(x+iy-1) - \arg(x+iy+1) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg[(x-1)+iy] - \arg[(x+1)+iy] = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x-1} - \tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan^{-1}\left[\frac{\frac{y}{x-1}-\frac{y}{x+1}}{1+\left(\frac{y}{x-1}\right)\left(\frac{y}{x+1}\right)}\right] = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y}{x^2-1+y^2} = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1} = \sqrt{3}$$

$$2y = \sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2-\sqrt{3}$$

$\therefore \sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2-2y-\sqrt{3} = 0$ என்பது தேவையான நியமப்பாதையாகும்.

முடிவு : (நிரூபணமின்றி) :

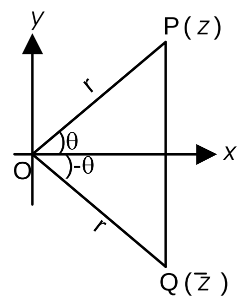
$|z - z_1| = |z - z_2|$ எனில் z-இன் நியமப்பாதை என்பது z_1 மற்றும் z_2 என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியாகும்.

3.6.4 இணைக் கலப்பெண்ணின் வடிவ கணித விளக்கம் (Geometrical meaning of conjugate of a complex number) :

$z = x + iy$ என்ற ஒரு கலப்பு எண்ணை ஆர்கன் தளத்தில் Pஎனக் குறித்துக் கொள்க. அதன் இணை எண் $\overline{z}$ஐ $\overline{z} = x - iy$ எனக் கொள்ளலாம்.

(அ.து.), $z = (x, y) \Rightarrow \overline{z} = (x, -y)$

$\therefore$ இணை $\overline{z}$ஐ Q எனக் குறிப்போமாயின், z-இன் இணை எண் என்பது மெய் அச்சில் z-இன் பிரதிபலிப்பு ஆகும். (படம் 3.3).



படம் 3.3

இதிலிருந்து $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ என்பது முற்றிலும் ஒரு மெய் எண்ணாகும் என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் $\overline{\overline{z}} = z$.

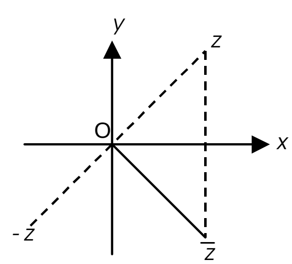
துருவ வடிவத்தில் $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்

$$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

எனவே, $z = (r, \theta)$ எனில் $\overline{z} = (r, -\theta)$

அகவே z மற்றும் $\overline{z}$-இன் மட்டுக்கள் சமமாகும். (அ.து.), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. ஆனால் z-இன் வீச்சு θ, $\overline{z}$-இன் வீச்சு $-\theta$. எனவே $|\overline{z}| = |z|$ மற்றும் $\text{amp}\ \overline{z} = -\text{amp}\ z$.

படம் 3.4 ஆனது கலப்பெண் z மற்றும் அதன் குறை எண் $-z$ ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான வடிவக் கணிதத் தொடர்புகளைத் தருகிறது. $-z = (-x, -y)$. இது ஆதியைப் பொறுத்து zக்கு சமச்சீராக அமைந்த புள்ளி.



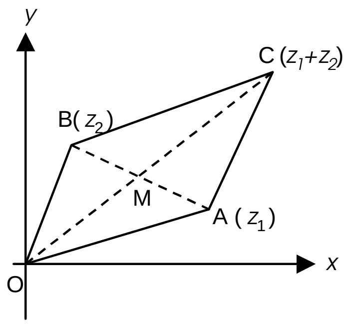
படம் 3.4

3.6.5 இரு கலப்பெண்களின் கூட்டலின் வடிவக் கணித உருவமைப்பு (Geometrical representation of sum of two complex numbers) :

ஆர்கன் தளத்தில் $z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ என்ற இரு கலப்பெண்களை A மற்றும் B புள்ளிகளால் குறிக்க. $OACB$ என்ற இணைகரத்தை நிறைவு செய்க. இங்கு C என்பது $z_1 + z_2$ என்ற கலப்பெண்ணைக் குறிக்கின்றது.

நிரூபணம் :

$OACB$ ஒரு இணைகரம் என்பதால் மூலைவிட்டங்கள் OC மற்றும் AB Mஇல் இருசமக்கூறிடும். படம் 3.5இல் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$வை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளி M என்பது $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$… (1)



படம் 3.5

$C\ (h, k)$ எனில் OC-இன் மையப்புள்ளி $M\left(\frac{0 + h}{2}, \frac{0 + k}{2}\right)$

(அ.து.), M என்பது $\left(\frac{h}{2}\ ,\ \frac{k}{2}\right)$… (2)

$\therefore$ (1) மற்றும் (2)–இலிருந்து

$$\frac{h}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}\ \ ;\ \ \frac{k}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\Rightarrow\ h = x_1 + x_2\ ;\ k = y_1 + y_2$$

$\therefore$ C என்பது $(x_1 + x_2,\ \ y_1 + y_2)$

எனவே C ஆனது கலப்பெண் $(x_1 + x_2) + i\ (y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2$ஐ குறிக்கின்றது.

குறிப்பு :

$OA = |\ z_1\ |,\ \ OB = |\ z_2\ |$ மற்றும் $OC = |\ z_1 + z_2\ |$

ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் இரு பக்க நீளங்களின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்க நீளத்தை விட பெரிது.

$\therefore$ ΔOAC-யிலிருந்து $OA + AC > OC$ அல்லது $OC < OA + AC$

$$|\ z_1 + z_2\ | < |\ z_1\ | + |\ z_2\ | \qquad \ldots (1)$$

மேலும் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைவன எனில்

$$|\ z_1 + z_2\ | = |\ z_1\ | + |\ z_2\ | \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)-இலிருந்து

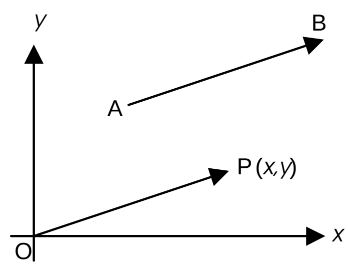
$$| z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_2 |$$

இக்காரணத்தினாலேயே இச்சமனிலியை முக்கோணச் சமனிலி என்கின்றோம்.

3.6.6 கலப்பெண்களின் வெக்டர் விளக்கம் (Vector interpretation of complex numbers) :

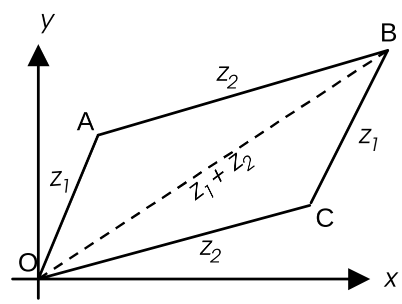
ஆர்கன் தளத்தில் $z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ என்ற இரு கலப்பெண்களை A மற்றும் B எனக் குறிக்க. இணைகரம் $OACB$ஐ நிறைவு செய்க. C ஆனது $z_1 + z_2$ என்ற கலப்பெண்ணை குறிப்பதாகும்.

ஒரு கலப்பெண் $z = x + iy$ஐ, Oவை தொடக்கப் புள்ளியாகவும் $P=P(x, y)$வை முடிவுப் புள்ளியாகவும் கொண்டுள்ள வெக்டர் OP எனக் கொள்ளலாம். எனவே $OP = x + iy$ஐ P-இன் நிலை வெக்டர் என அழைக்கலாம். சம நீளம் அல்லது சம மட்டு அளவைக் கொண்டு, ஒரே திசையை நோக்கிச் செல்லும் ஆனால் வெவ்வேறு தொடக்கப் புள்ளிகளைக் கொண்ட OP மற்றும் AB என்னும் இரு வெக்டர்களை சமம் எனக் கொள்ளலாம். (படம் 3.6) $\therefore$ $OP=AB = x + iy$



படம் 3.6

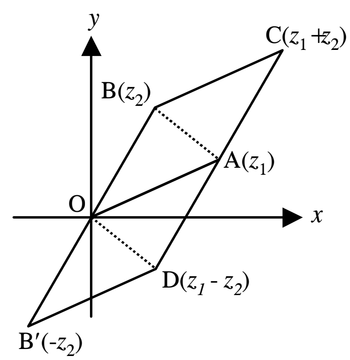
மேற்கூறிய கலப்பெண்ணின் வெக்டர் விளக்கத்தின்படி கலப்பெண்களின் கூடுதல், வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கான இணைகர விதியை ஒத்து வருவதைக் காண்கிறோம். எனவே z_1 மற்றும் z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களைக் கூட்ட அவ்விரு கலப்பெண்களை முறையே OA, OC எனக் கொண்டு நிறைவு செய்யப்படும் இணைகரம் $OABC$இல் அதன் மூலை விட்டம் OB என்பது $z_1 + z_2$வைக் குறிப்பதாகும். (படம் 3.7)



படம் 3.7

3.6.7 இரு கலப்பெண்களின் வித்தியாசங்களின் வடிவக் கணித உருவமைப்பு (Geometrical representation of difference of two complex numbers) :

ஆர்கன் தளத்தில் *A*, *B* ஆனது $z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ என்ற கலப்பெண்களைக் குறிக்கட்டும். *BO*ஐ $OB' = OB$ என இருக்குமாறு B' வரை நீட்டவும் இங்கு B' ஆனது கலப்பெண் $-z_2$வை குறிக்கின்றது. இணைகரம் $OADB'$யை நிறைவு செய்க. இதில் *D*ஆனது z_1 மற்றும் $-z_2$ கலப்பு எண்களின் கூடுதலை அல்லது $z_1 - z_2$வை குறிக்கிறது. i.e., *D* ஆனது z_1 மற்றும் z_2வின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கின்றது. (படம் 3.8)



படம் 3.8

முடிவு : படத்தில் $OD = AB$. ஆனால் $OD = |z_1 - z_2|$. $\therefore AB$ என்பது z_1 மற்றும் z_2விற்கு இடையேயுள்ள தொலைவு$|z_1 - z_2|$ ஆகும்.

குறிப்பு : இணைகரம் *OACB*ஐ நிறைவு செய்க. இங்கு *C* என்பது $z_1 + z_2$ என்ற கலப்பெண்ணைக் குறிக்கின்றது.

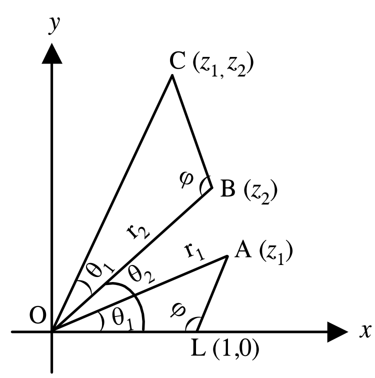
3.6.8 இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கற்பலனின் வடிவக் கணித உருவமைப்பு (Geometrical representation of product of two complex numbers) :

ஆர்கன் தளத்தில் *A* மற்றும் *B* என்ற புள்ளிகள் முறையே z_1 மற்றும் z_2 என்ற கலப்பெண்களைக் குறிக்கட்டும். $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ மற்றும் $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$OA = r_1$, $\underline{|XOA} = \theta_1$

$OB = r_2$, $\underline{|XOB} = \theta_2$.

OX-இல் *L* எனும் புள்ளியை $OL = 1$ அலகு என இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்க.



படம் 3.9

ΔOBCஐ $\Delta\, OLA$க்கு வடிவொத்த அமைப்பில் வரைக. (படம் 3.9)

$$\frac{OB}{OL} = \frac{OC}{OA} \qquad \text{i.e., } \frac{r_2}{1} = \frac{OC}{r_1}$$

$$\therefore OC = r_1 r_2$$

மேலும் $\angle XOC = \angle XOB + \angle BOC$

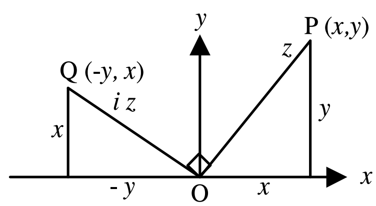
$$= \angle XOB + \angle XOA$$

$$= \theta_2 + \theta_1 \text{ (அ) } \theta_1 + \theta_2 \ \left(\because \angle XOA = \angle BOC\right)$$

∴ இங்கு C எனும் புள்ளி கலப்பெண் z_1z_2வை குறிக்கின்றது. அதன் துருவ ஆயத்தொலைகள் $(r_1\, r_2,\ \theta_1 + \theta_2)$

***குறிப்பு* :** P என்ற புள்ளி

$z= r\,(\cos\theta + i\sin\theta)=re^{i\theta}$ என்ற கலப்பு எண்ணை குறிக்கட்டும். இதனை $(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{i\alpha}$ ஆல் பெருக்குவதின் விளைவு Oவை மையமாகக் கொண்டு கடிகார எதிர்த்திசையில் α கோண அளவுக்கு $P(z)$ஐச் சுழற்றுவதாகும். (படம் 3.10)



படம் 3.10

குறிப்பாக $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{i\pi}{2}}$ என்பதால் கலப்பெண் $P(z)$ஐ iஆல் பெருக்குவதின் விளைவு ஆதியை மையமாகக் கொண்டு செங்கோண அளவுக்கு கடிகார எதிர்திசையில் Pஐச் சுழற்றுவதாகும்.

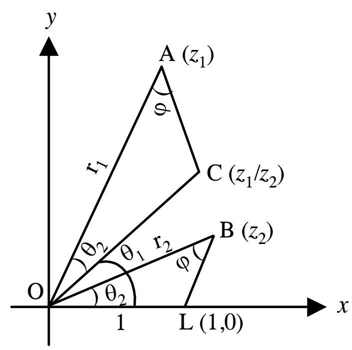
3.6.9 இரு கலப்பெண்களின் வகுத்தலின் வடிவக் கணித உருவமைப்பு (Geometrical representation of the quotient of two complex numbers) :

ஆர்கன் தளத்தில் A, Bஎன்பன இரு கலப்பெண்கள் z_1 மற்றும் z_2 வைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ மற்றும் $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$; $(z_2 \neq 0)$

$OA = r_1,\ \angle XOA = \theta_1$

$OB = r_2, \angle XOB = \theta_2$.



படம் 3.11

OX-இல் L எனும் புள்ளியை $OL = 1$ அலகு என இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்க. ΔOACஐ ΔOBLக்கு வடிவொத்த அமைப்பில் வரைக. (படம் 3.11)

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OL} \qquad \text{(அ.து.)} \ \frac{r_1}{r_2} = \frac{OC}{1}$$

$$\therefore OC = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\lfloor\underline{XOC} = \lfloor\underline{XOA} - \lfloor\underline{COA} = \theta_1 - \theta_2$$

$\therefore$ C எனும் புள்ளியின் துருவ ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{r_1}{r_2},\ \theta_1 - \theta_2\right)$ ஆகும்.

எனவே C ஆனது கலப்பெண் $\frac{z_1}{z_2}$வைக் குறிக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 3.12 : $|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$ என்பதனை வரைபடம் மூலம் நிறுவுக.

தீர்வு :

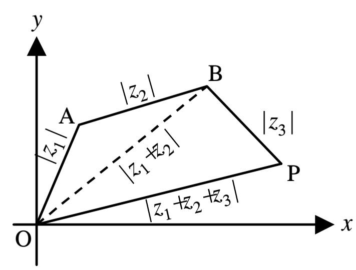
ΔOAB-இல் முக்கோணச் சமனின்மையின்படி

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ΔOBP-இல் முக்கோணச் சமனின்மையின்படி

$|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1 + z_2| + |z_3|$

$\qquad \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$



படம் 3.12

$\therefore |z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$

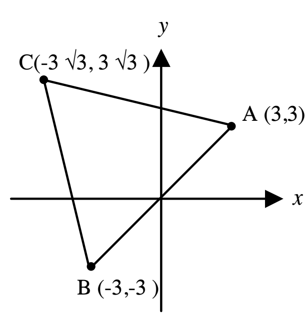
எடுத்துக்காட்டு 3.13: $3+3i$, $-3 -3i$, $-3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\, i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை ஆர்கன் தளத்தில் உருவாக்கும் என்று காட்டுக.

தீர்வு :

A, B, C என்ற புள்ளிகள் முறையே $(3+3i)$, $(-3 - 3i)$ மற்றும் $(-3\sqrt{3} + i3\sqrt{3})$ எனும் கலப்பெண்களை ஆர்கன் தளத்தில் குறிக்கட்டும்.

$AB = |(3 + 3i) - (-3 - 3i)|$

$\quad = |6 + 6i| = \sqrt{72}$



படம் 3.13

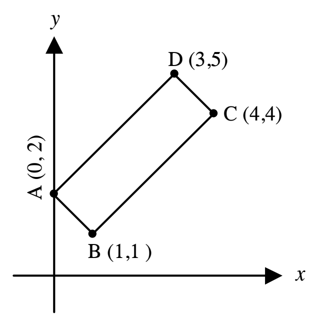
$$BC = \left|(-3-3i) - \left(-3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i\right)\right|$$
$$= \left|\left(-3+3\sqrt{3}\right) + i\left(-3-3\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{72}$$
$$CA = \left|\left(-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i\right) - (3+3i)\right|$$
$$= \left|\left(-3\sqrt{3}-3\right) + i\left(3\sqrt{3}-3\right)\right| = \sqrt{72}$$
$$AB = BC = CA$$

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.14 : $2i$, $1 + i$, $4 + 4i$ மற்றும் $3 + 5i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஆர்கன் தளத்தில் ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

A, B, C, D என்ற புள்ளிகள் முறையே $2i$, $(1 + i)$, $(4 + 4i)$ மற்றும் $(3 + 5i)$ எனும் கலப்பெண்களை ஆர்கன் தளத்தில் குறிக்கட்டும்.



படம் 3.14

$$AB = |\,2i - (1+i)\,|$$
$$= |-1+i\,| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$
$$BC = |\,(1+i) - (4+4i)\,|$$
$$= |-3-3i\,|$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$CD = |\,(4+4i) - (3+5i)\,|$$
$$= |\,1-i\,| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$DA = |\,(3+5i) - 2i\,| = |\,3+3i\,| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$$

$\therefore$ $AB = CD$ மற்றும் $BC = DA$

$$AC = |\,(0+2i) - (4-4i)\,|$$
$$= |-4-2i\,|$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$
$$AB^2 + BC^2 = 2 + 18 = 20$$
$$AC^2 = 20$$

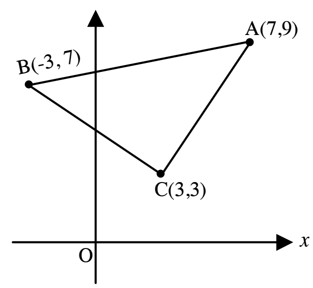
எனவே $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore$ எதிர்ப்பக்க ஜோடிகள் சமம் மற்றும் $\underline{|B} = 90^\circ$ எனவே $ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15 : *கலப்பெண்கள்* $7 + 9i$, $-3 + 7i$, $3 + 3i$ *எனும் கலப்பெண்கள் ஆர்கன் தளத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.*

தீர்வு :

A, B, C *எனும் புள்ளிகள் முறையே* $7 + 9i$, $-3 + 7i$, $3 + 3i$ *எனும் கலப்பெண்களை ஆர்கன் தளத்தில் குறிக்கட்டும்.*



படம் 3.15

$AB = |(7 + 9i) - (-3 + 7i)|$

$= |10 + 2i| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104}$

$BC = |(-3 + 7i) - (3 + 3i)|$

$= |-6 + 4i|$

$= \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

$CA = |(3 + 3i) - (7 + 9i)|$

$= |-4 - 6i|$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + CA^2$

$\Rightarrow \underline{|BCA} = 90°$ *மேலும்* $BC = CA$

எனவே ΔABC *ஒரு இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணமாகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 3.16 : $(-7 + 24i)$*-இன் வர்க்கமூலம் காண்க.*

தீர்வு :

$\sqrt{-7 + 24i} = x + iy$ *என்க.*

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$-7 + 24i = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட,

$x^2 - y^2 = -7$ *மற்றும்* $2xy = 24$

$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{(-7)^2 + (24)^2} = 25$

$x^2 - y^2 = -7$ *மற்றும்* $x^2 + y^2 = 25$*-ஐ தீர்வு காண்பதன் மூலம்*

$x^2 = 9$ *மற்றும்* $y^2 = 16$ *எனக் கிடைக்கும்.*

$\therefore x = \pm 3$ *மற்றும்* $y = \pm 4$

xy ஒரு மிகை எண் என்பதால் x-ம் y-ம் ஒரே குறியாக கொள்ள வேண்டும்

$\therefore$ $(x = 3, y = 4)$ அல்லது $(x = -3, y = -4)$

$$\therefore \sqrt{-7 + 24i} = (3 + 4i) \text{ அல்லது } (-3 - 4i)$$

பயிற்சி 3.2

(1) $(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i) \ldots (1 + ni) = x + iy$ எனில் $2.5.10 \ldots (1 + n^2) = x^2 + y^2$ என நிறுவுக.

(2) $(-8 - 6i)$-இன் வர்க்கமூலம் காண்க.

(3) $z^2 = (0, 1)$ எனில் zஐ காண்க.

(4) ஆர்கன் தளத்தில் கலப்பெண்கள் $(10 + 8i)$, $(-2 + 4i)$ மற்றும் $(-11 + 31i)$ அமைக்கும் முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக.

(5) $(7 + 5i)$, $(5 + 2i)$, $(4 + 7i)$ மற்றும் $(2 + 4i)$ எனும் கலப்பெண்கள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக. (புள்ளிகளை குறித்து மையப் புள்ளிக்கான வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துக).

(6) கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களை துருவ வடிவத்தில் எழுதுக.

(i) $2 + 2\sqrt{3}\,i$ (ii) $-1 + i\sqrt{3}$ (iii) $-1 - i$ (iv) $1 - i$

(7) $(z - 1)$இன் வீச்சு $= \dfrac{\pi}{6}$ மற்றும் $(z + 1)$இன் வீச்சு $= \dfrac{2\pi}{3}$ எனில் $|z| = 1$ என நிறுவுக.

(8) P எனும் புள்ளி கலப்பெண் மாறி zஐக் குறித்தால் P-இன் நியமப்பாதையை பின்வருவனவற்றிற்கு காண்க.

(i) $\text{Im}\left[\dfrac{2z + 1}{iz + 1}\right] = -2$ (ii) $|z - 5i| = |z + 5i|$

(iii) $Re\left(\dfrac{z - 1}{z + i}\right) = 1$ (iv) $|2z - 3| = 2$ (v) $\arg\left(\dfrac{z - 1}{z + 3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

3.7 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of polynomial equations) :

$x^2 - 4x + 7 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டில்

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4)(7)(1)$$

$$= 16 - 28 = -12 \text{ என்பது ஒரு குறை எண்.}$$

$\therefore$ இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல. இதன் மூலங்கள்

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = 2 \pm i\sqrt{3}$$

இங்கு மூலங்கள் $2 + i\sqrt{3}$ மற்றும் $2 - i\sqrt{3}$ ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவுள்ளது என்பதைக் காண்கிறோம்.

1-ன் முப்படி மூலங்களை எடுத்துக் கொள்க.

$$x = (1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow x^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x - 1 = 0 \text{ (அல்லது) } x^2 + x + 1 = 0$$

எனவே $x = 1$ (அல்லது) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-(4)(1)(11)}}{2}$

$\therefore$ 1-இன் முப்படி மூலங்கள், $1, \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ஆகும்.

இங்கும் இரு கலப்பெண் மூலங்கள் $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ஒன்றுக்கொன்று இணை எண்ணாக உள்ளதைக் காண்கிறோம்.

மேற்காணும் இரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம், மெய்யெண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டின் கற்பனை மூலங்கள் இரட்டையாக காணப்படும் என்பதை அறியலாம். ((அ.து.) ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்தின் இணையெண்ணாகும்.). இப்போது அதற்குரிய தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் :

மெய்யெண் குணகங்களைக் கொண்ட $P(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் கலப்பெண் மூலங்கள் இணையெண் இரட்டையாகத்தான் இடம்பெறும்.

நிரூபணம் :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ என்பது மெய் குணகங்களுடைய ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க.

$P(x) = 0$க்கு z ஒரு மூலம் என்க. $P(x) = 0$க்கு $\overline{z}$ ம் ஒரு மூலம் என்று காட்ட வேண்டும்.

$P(x) = 0$க்கு z ஒரு மூலம் ஆதலால்

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad \ldots (1)$$

இருபுறமும் கலப்பெண் இணையெண் காண,

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0}$$

இரு கலப்பெண்களின் கூடுதலின் இணையெண், அவற்றின் தனித்தனி இணைகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாவதால்

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

(அ.து.) $\overline{a_n}\ \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\ \overline{z} + \overline{a_0} = 0$

இங்கு $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ மற்றும்

$a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ மெய்யெண்கள் ஆதலால் அவை ஒவ்வொன்றும் தனக்குத்தானே கலப்பெண் இணையாகின்றன. எனவே,

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

$$a_n \overline{z}^{\,n} + a_{n-1} \overline{z}^{\,n-1} + \ldots a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P\left(\overline{z}\right) = 0$$

$P(x) = 0$க்கு $\overline{z}$ -ம் ஒரு மூலம் என்பதே இதன் பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17 : $2 + \sqrt{3}\, i$ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்.

தீர்வு : $2 + i\sqrt{3}$ ஒரு மூலம், எனவே $2 - i\sqrt{3}$ மற்றொரு மூலம், (கலப்பெண் மூலங்கள் இரட்டையாகவே அமையும்).

மூலங்களின் கூடுதல் = 4

மூலங்களின் பெருக்கம் = $\left(2 + i\sqrt{3}\right)\left(2 - i\sqrt{3}\right) = 4 + 3 = 7$

$\therefore\ x^2 - 4x + 7$என்பது ஓர் காரணியாகிறது.

$x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + px + 5)$

xஇன் கெழுவை ஒப்பிட, $8 = 7p - 20 \Rightarrow p = 4$

$\therefore\ x^2 + 4x + 5$ என்பது மற்றொரு காரணியாகும்.

$\therefore\ x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm i$

எனவே மூலங்கள் $2 \pm i\sqrt{3}$ மற்றும் $-2 \pm i$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.3

(1) $3 + i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 20 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(2) $1 + 2i$ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(3) $2 - i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $6x^4 - 25x^3 + 32x^2 + 3x - 10 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

3.8 டி-மாய்வரின் தேற்றமும் அதன் பயன்பாடுகளும்
(De Moivre's Theorem and its applications) :

தேற்றம் :

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண் nக்கும் $\cos n\theta + i\sin n\theta$ *என்பது* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$*-இன் மதிப்பாகவோ அல்லது மதிப்புகளில் ஒன்றாகவோ இருக்கும்.*

நிரூபணம் :

***நிலை* I :** n *ஒரு மிகை முழு எண் என்க.*

சாதாரண பெருக்கலின்படி

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

இதே போல் $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

இதனை n *கலப்பெண்களின் பெருக்கலுக்கு விரிவுபடுத்த,*

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

இதில் $\theta_1 = \theta_2 \ldots = \theta_n = \theta$, *எனப் பிரதியிட,*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$ *எனப் பெறப்படுகிறது.*

***நிலை* II :** n *ஒரு குறை முழு எண், மற்றும்* $n = -m$ *என்க.* (m *மிகை முழு எண்*)

$$\therefore\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$

$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \quad \text{(நிலை I இலிருந்து)}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$$

$$= \cos m\theta - i\sin m\theta$$

$$= \cos(-m)\theta + i\sin(-m)\theta$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

***நிலை* III :** *n ஒரு பின்னம் (அ.து.). $n = \dfrac{p}{q}$, q என்பது மிகை முழு எண், p ஒரு முழு எண்.*

நிலை I*இன் படி* $\left[\cos\dfrac{\theta}{q} + i\sin\dfrac{\theta}{q}\right]^q = \cos\theta + i\sin\theta$

$\cos\dfrac{\theta}{q} + i\sin\dfrac{\theta}{q}$ *-இன் q-ஆவது அடுக்கு* $\cos\theta + i\sin\theta$ *ஆகும்.*

$\therefore\ \cos\dfrac{\theta}{q} + i\sin\dfrac{\theta}{q}$ *என்பது* $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}$*-இன் மதிப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்றாகும். இவை ஒவ்வொன்றையும் p-ஆவது அடுக்குக்கு உயர்த்த,*

$\therefore\ \left(\cos\dfrac{\theta}{q} + i\sin\dfrac{\theta}{q}\right)^P$ *என்பது* $\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}\right]^p$ *-இன் மதிப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்று.*

(அ.து.), $\cos\dfrac{p}{q}\theta + i\sin\dfrac{p}{q}\theta$ *என்பது* $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$*-இன் மதிப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்றாகும்.*

(அ.து.), $\cos n\theta + i\sin n\theta$ *என்பது* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$*-இன் மதிப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்றாகும்.*

***குறிப்பு* :** *டி-மாய்வரின் தேற்றம் விகிதமுறா எண்களுக்கும் பொருந்தும். அதன் நிரூபணம் இப்புத்தகத்தின் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.*

பண்புகள் :

(i) $$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

(ii) $$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

(iii) $$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18 : *சுருக்குக :* $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^3\,(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^{-3}}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-6}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^8}$

தீர்வு :

$$\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^3 (\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^{-3}}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^{-6} (\cos \theta + i \sin \theta)^8} = \frac{(e^{i2\theta})^3 . (e^{-i3\theta})^{-3}}{(e^{i4\theta})^{-6} (e^{i\theta})^8} = \frac{e^{i6\theta} \; e^{i9\theta}}{e^{-i24\theta} . e^{i8\theta}}$$

$$= e^{i15\theta} . e^{i16\theta}$$

$$= e^{i31\theta} = \cos 31\theta + i \sin 31\theta$$

மாற்று முறை :

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^6 (\cos \theta + i \sin \theta)^9}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-24} (\cos \theta + i \sin \theta)^8} = (\cos \theta + i \sin \theta)^{6 + 9 + 24 - 8}$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta)^{31}$$

$$= \cos 31\theta + i \sin 31\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 3.19 : சுருக்குக : $\dfrac{(\cos \theta + i \sin\theta)^4}{(\sin\theta + i \cos\theta)^5}$

தீர்வு :

$$\frac{(\cos \theta + i \sin\theta)^4}{(\sin\theta + i \cos\theta)^5} = \frac{(\cos \theta + i \sin\theta)^4}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^5}$$

$$= \cos\left[4\theta - 5\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] + i \sin\left[4\theta - 5\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= \cos\left(9\theta - \frac{5\pi}{2}\right) + i \sin\left(9\theta - \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 9\theta\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 9\theta\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 9\theta\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - 9\theta\right)$$

$$= \sin 9\theta - i \cos 9\theta$$

மாற்று முறை :

$$\frac{(\cos \theta + i \sin\theta)^4}{(\sin\theta + i \cos\theta)^5} = \frac{1}{i^5} \left[\frac{(\cos \theta + i \sin\theta)^4}{(\cos\theta - i \sin\theta)^5}\right]$$

$$= - i (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) (\cos 5\theta + i \sin 5\theta)$$

$$= - i [\cos 9\theta + i \sin 9\theta]$$

$$= \sin 9\theta - i \cos 9\theta$$

முடிவு : $| z | = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

எடுத்துக்காட்டு 3.20 : *n என்பது மிகை முழு எண் எனில்*

$$\left(\frac{1 + \sin\theta + i \cos\theta}{1 + \sin\theta - i \cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$ *என நிரூபிக்க.*

தீர்வு :

$z = \sin\theta + i \cos\theta$ *எனில்*

$\therefore \frac{1}{z} = \sin\theta - i \cos\theta$

$$\therefore \left(\frac{1 + \sin\theta + i \cos\theta}{1 + \sin\theta - i \cos\theta}\right)^n = \left(\frac{1 + z}{1 + \frac{1}{z}}\right)^n = z^n = (\sin\theta + i \cos\theta)^n$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^n$$

$$= \left[\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 3.21 : *n என்பது மிகை முழு எண் எனில்*

$$(\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n = 2^{n+1} \cos\frac{n\pi}{6}$$ *என நிரூபிக்க.*

தீர்வு :

$(\sqrt{3} + i) = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ *என்க. மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது,*

$r \cos\theta = \sqrt{3}$ *மற்றும்* $r \sin\theta = 1$

$$\therefore r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

எனவே $$(\sqrt{3} + i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^n = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)^n$$

$$= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i \sin\frac{n\pi}{6}\right) \qquad \ldots (1)$$

$\sqrt{3} - i$*ஐ கணக்கிட* i*க்கு பதில்* $-i$*ஐ பிரதியிட, நாம் பெறுவது,*

$$(\sqrt{3} - i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}\right) \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)ஐ கூட்ட நாம் பெறுவது

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^n + \left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n \left(2 \cos \frac{n\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{n+1} . \cos \frac{n\pi}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.22 : α , β என்பவை $x^2 - 2x + 2 = 0$-இன் மூலங்கள் மற்றும் $\cot \theta = y + 1$ எனில்

$$\frac{(y + \alpha)^n - (y + \beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta}$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$x^2 - 2x + 2 = 0$-இன் மூலங்கள் $1 \pm i$.

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 1 - i$ என்க.

$$(y + \alpha)^n = [(\cot\theta - 1) + (1 + i)]^n$$

$$= (\cot\theta + i)^n$$

$$= \frac{1}{\sin^n \theta} [\cos\theta + i \sin\theta]^n$$

$$= \frac{1}{\sin^n \theta} [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

இதேபோல $$(y + \beta)^n = \frac{1}{\sin^n \theta} [\cos n\theta - i \sin n\theta]$$

$$(y + \alpha)^n - (y + \beta)^n = \frac{2i \sin n\theta}{\sin^n \theta}$$

மேலும் $$\alpha - \beta = (1 + i) - (1 - i) = 2i$$

$$\frac{(y + \alpha)^n - (y + \beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{2i \sin n\theta}{2i \sin^n \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta}$$

பயிற்சி 3.4

(1) சுருக்குக : $$\frac{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7 \ (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^{12} \ (\cos 5\theta - i \sin 5\theta)^{-6}}$$

(2) சுருக்குக: $$\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3}{(\sin \beta + i \cos \beta)^4}$$

(3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ எனில் பின்வருபனவற்றை நிறுவுக:

(i) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\, sin\,(\alpha + \beta + \gamma)$

(iii) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$

(iv) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$

(குறிப்பு : $a = \text{cis}\,\alpha$, $b = \text{cis}\,\beta$, $c = \text{cis}\,\gamma$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + b^3 = 3abc$$

$$1/a + 1/b + 1/c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0)$$

(v) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{3}{2}$

கணக்குகள் 4 முதல் 9வரை $m, n \in N$ எனக் கொள்க.

(4) நிறுவுக:

(i) $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$

(ii) $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

(iii) $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^{n+1}\cos^n(\theta/2)\cos\frac{n\theta}{2}$

(iv) $(1 + i)^{4n}$ மற்றும் $(1 + i)^{4n+2}$ முறையே மெய் மற்றும் முழுவதும் கற்பனையாகும்.

(5) $x^2 - 2px + (p^2 + q^2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α , β மற்றும் $\tan\theta = \frac{q}{y + p}$ எனில் $\frac{(y + \alpha)^n - (y + \beta)^n}{\alpha - \beta} = q^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta}$ என நிறுவுக.

(6) $x^2 - 2x + 4 = 0$-இன் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் $\alpha^n - \beta^n = i2^{n+1}\sin\frac{n\pi}{3}$ அதிலிருந்து $\alpha^9 - \beta^9$-ன் மதிப்பை பெறுக.

(7) $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$ எனில்

(i) $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$ (ii) $x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$ என நிரூபி.

(8) $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, $y + \frac{1}{y} = 2\cos\phi$ எனில்

(i) $\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$ (ii) $\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\theta - n\phi)$ எனக் காட்டுக.

(9) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $y = \cos\beta + i\sin\beta$

எனில் $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$ என நிரூபி.

(10) $a = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, $b = \cos 2\beta + i\sin 2\beta$ and $c = \cos 2\gamma + i\sin 2\gamma$ எனில்

(i) $\sqrt{abc} + \frac{1}{\sqrt{abc}} = 2\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\frac{a^2 b^2 + c^2}{abc} = 2\cos 2(\alpha + \beta - \gamma)$ என நிரூபி.

3.9 கலப்பெண்ணின் மூலங்கள் (Roots of a complex number) :

வரையறை :

$\omega^n = z$ எனக் கொண்டு விளங்கும் ω என்ற எண்ணை z என்ற கலப்பு எண்ணின் n –ஆம் படி மூலம் என்கிறோம் மற்றும் நாம் இதை $\omega = z^{\frac{1}{n}}$ என எழுதலாம்.

ஒரு கலப்பெண்ணின் nஆம் படிமூலங்களைக் காணும் செயல் விதி (Working rule to find the *n*th roots of a complex number) :

படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை துருவ வடிவில் எழுதுக.

படி 2 : வீச்சுடன் $2k\pi$யை கூட்டுக.

படி 3 : டி-மாய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக. (அடுக்கை உள்ளே கொண்டு செல்க)

படி 4 : $k = 0, 1 \ldots n-1$ வரை பிரதியிடுக

விளக்கம் :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

$= r\{\cos(2k\pi + \theta) + i\sin(2k\pi + \theta)\}$, $k \in Z$

$$\therefore z^{\frac{1}{n}} = [r\{\cos(2k\pi + \theta) + i\sin(2k\pi + \theta)]^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right]$$

இங்கு $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ ஆகும்.

k யின் இந்த மதிப்புகளே, $z^{\frac{1}{n}}$ -இன் n வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொடுக்கும். (அ.து.) $z \neq 0$ ஆக இருக்கும்பொழுது இவை z-இன் n வெவ்வேறு மூலங்கள் ஆகும்.

குறிப்பு :

(1) பூச்சியமற்ற கலப்பெண்ணின் nஆம் படி மூலங்களின் எண்ணிக்கை n ஆகும்.

(2) இந்த மூலங்களின் மட்டுக்கள் யாவும் குறையற்ற ஒரே மெய்யெண்ணாகும்.

(3) n மூலங்களின் வீச்சுக்கள் சம இடைவெளியில் அமைகின்றன. arg z இன் முதன்மை மதிப்பு θ (அ.து.), $-\pi \le \theta \le \pi$ எனில் மற்ற மூலங்களின் வீச்சுகளை அடைய $\frac{\theta}{n}$ உடன் முறையே $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ... ஆகியவற்றை கூட்ட வேண்டும்.

(4) kக்கு முழு எண் மதிப்புகள் n அல்லது அதற்கு கூடுதலாகவோ பிரதியீடு செய்தால் இந்த $(n-1)$ மதிப்புகளே திரும்பத் திரும்பக் கிடைக்குமேயன்றி புதிய மூலம் எதுவும் கிடைக்காது.

3.9.1 ஒன்றின் n-ஆம் படி மூலங்கள் (The *n*th roots of unity) :

$$1 = (\cos 0 + i \sin 0) = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

$$n\text{படி மூலங்கள்} = 1^{\frac{1}{n}} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \text{ இங்கு } k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

$\therefore \cos 0 + i \sin 0$, $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}$,

$\cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n}$, ……, $\cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + i \sin (n-1) \frac{2\pi}{n}$ முதலானவை ஒன்றின் nஆம் படி மூலங்களாகும்.

$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ என்க. $\therefore$ ஒன்றின் nஆம் படி மூலங்கள்,

$e^0, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n}}, \ldots e^{i\frac{2(n-1)}{n}\pi}$ அல்லது $1, \omega, \omega^2 \ldots \omega^{n-1}$ ஆகும்.

இந்த மூலங்கள் பெருக்குத் தொடர் முறையில் உள்ளன. இந்த மூலங்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

முடிவுகள் :

(1) $\omega^n = 1$

$$\omega^n = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

(2) மூலங்களின் கூடுதல் 0

i.e., $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$

$$\because \text{ LHS} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}$$

$$= \frac{1.(1-\omega^n)}{1-\omega} \qquad \because \left[1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}\right]$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

(3) மூலங்கள் பெருக்குத் தொடர்முறை (G.P)இல் உள்ளன. இதன் பொது விகிதம் ω ஆகும்.

(4) வீச்சுகள் கூட்டுத் தொடர்முறை (A.P)யில் உள்ளன. இதன் பொது வித்தியாசம் $\frac{2\pi}{n}$ ஆகும்.

(5) மூலங்களின் பெருக்கம் = $(-1)^{n+1}$

3.9.2 ஒன்றின் முப்படி மூலங்கள் (Cube roots of unity : $(1)^{1/3}$) :

$x = (1)^{\frac{1}{3}}$ என்க.

$\therefore x = (\cos 0 + i \sin 0)^{\frac{1}{3}}$

$= (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{\frac{1}{3}}$, k ஒரு முழு எண்

$x = \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}\right)$, இங்கு $k = 0, 1, 2$

மூன்று மூலங்களானவை,

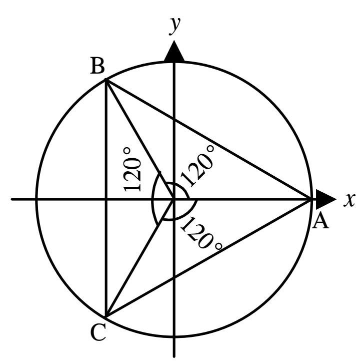
$\cos 0 + i \sin 0,\ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3},\ \ \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$

i.e., $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்பன மூன்று மூலங்களாகும்.

மேற்குறிப்பு :

$\therefore$ இந்த மூன்று மூலங்களும் ஓரலகு வட்டத்தின் மேல் அமைகின்றன. முதல் ஆர வெக்டருக்கும் இரண்டாவது ஆர வெக்டருக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் இரண்டாவது ஆர வெக்டருக்கும் மூன்றாவது ஆர வெக்டருக்கும் இடைப்பட்ட கோணம், 3வது ஆர வெக்டருக்கும் முதல் ஆர வெக்டருக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ஒவ்வொன்றும் $\frac{2\pi}{3}$ ரேடியன் அல்லது 120° ஆகும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோட்டால் இணைக்கும்போது, அவை ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளாக அமைகின்றன.



படம் 3.16

இரண்டாவது மூலம் $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ஐ ω எனக் குறித்தால் $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \omega^2$ ஆகும்.

எனவே ஒன்றின் முப்படி மூலங்கள் 1, ω, ω^2 ஆகும். இவை பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன.

குறிப்பு :

(i) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \omega$ எனில் $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$

(ii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (அ.து.), ஒன்றின் முப்படி மூலங்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

(iii) $x^3 = 1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ω ஒரு மூலமாகயிருப்பதால் இந்தச் சமன்பாட்டில் ωயை பிரதியீடு செய்ய $\omega^3 = 1$ எனக் காண்கிறோம்.

3.6.5 ஒன்றின் நான்காம் படி மூலங்கள் (Fourth roots of unity) :

x என்பதை ஒன்றின் நான்காம்படி மூலம் என்க. $\therefore x = (1)^{\frac{1}{4}}$

(அ.து.) $x^4 = 1 = (\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$; k ஒரு முழு எண்

$$x = (\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right) \text{ இங்கு } k = 0, 1, 2, 3$$

மட்டு = 1

நான்கு மூலங்களாவன :

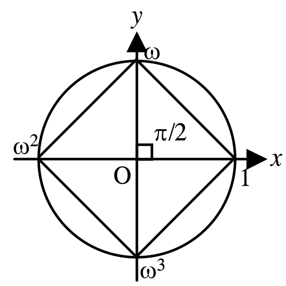
$\cos 0 + i\sin 0, \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, \cos\pi + i\sin\pi, \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

அவை $i, -1(= i^2), -i\ (= i^3)$. $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ஐ ω எனக் கொண்டால் 1-இன் நான்காம் படி மூலங்களாவன1, ω, ω^2, ω^3 ஆகும்.

ஒன்றின் நான்கு மூலங்களும் ஓரலகு வட்டத்திலுள்ள சதுரத்தின் முனைப் புள்ளிகளாக அமைகின்றன. ஒன்றின் நான்காம் படி மூலங்களின் கூடுதல் 0 ஆகும்.

(அ.து.), $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 0$

மற்றும் $\omega^4 = 1$



படம் 3.17

குறிப்பு : முப்படி மூலங்களில் காணப்பட்ட ω-இன் மதிப்புகளும் 4ஆம் படி மூலங்களில் காணப்பட்ட ω-இன் மதிப்புகளும் வெவ்வேறானவை.

3.6.6 ஒன்றின் ஆறாம் படி மூலங்கள் **(Sixth roots of unity) :**

x என்பது ஒன்றின் ஒரு ஆறாம் படி மூலம் என்க. $x = (1)^{1/6}$

$$\therefore \quad 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$(1)^{1/6} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/6} \qquad \ldots (1)$$

k முழு எண்

டி-மாய்வரின் தேற்றப்படி (De Moivre's theorem)

$$x = (1)^{\frac{1}{6}} = \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ஆறு மூலங்களானவை

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1$$

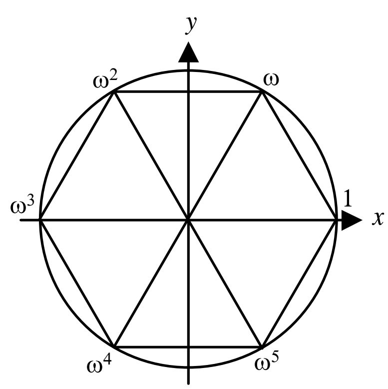
$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

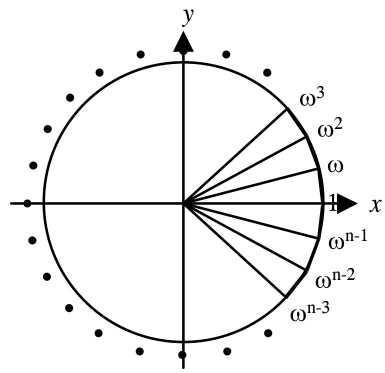
$$\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$



படம் 3.18

ஒன்றின் ஆறு ஆறாம் படி மூலங்கள் $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ ஆகும்.

படத்திலிருந்து, ஒன்றின் ஆறு மூலங்களும் ஓரலகு வட்டத்தில் அமையும் அறுங்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக அமைகின்றன (படம் 3.18). ஆகவே 1-இன் nவது படிமூலத்தின், n மூலங்களும், ஓரலகு வட்டத்தில் அமையும் n பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பல கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகளாக அமையும். (படம் 3.19).



படம் 3.19

எடுத்துக்காட்டு 3.23 : $x^9 + x^5 - x^4 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க**:**

தீர்வு :

$$x^9 + x^5 - x^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^5 (x^4 + 1) - 1 (x^4 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow\; (x^5 - 1) (x^4 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow\; x^5 - 1 = 0 \;;\; x^4 + 1 = 0$$
$$x = (1)^{\frac{1}{5}} \;;\; (-1)^{\frac{1}{4}}$$

(i) $$x = (1)^{\frac{1}{5}} = (\cos 0 + i \sin 0)^{\frac{1}{5}}$$
$$= (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{\frac{1}{5}}$$
$$= \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5},\; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

(ii) $$x = (-1)^{\frac{1}{4}} = (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{4}}$$
$$= \{\cos (2k + 1)\pi + i \sin (2k + 1)\pi\}^{\frac{1}{4}}$$
$$= \cos \frac{(2k + 1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2k + 1)\pi}{4},\; k = 0, 1, 2, 3$$

இவ்வாறு 9 மூலங்கள் பெறப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 3.24 : $x^7 + x^4 + x^3 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$$x^7 + x^4 + x^3 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^4 (x^3 + 1) + 1 (x^3 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow\; (x^4 + 1) (x^3 + 1) = 0$$
$$x^4 = -1 \;\;;\; x^3 = -1$$

(i) $x = (-1)^{\frac{1}{4}}$

$= (\cos\pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{4}}$

(அ.து.), $= [\cos (2k\pi + \pi) + i \sin (2k\pi + \pi)]^{\frac{1}{4}}$

$= \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4}\right]$; $k = 0, 1, 2, 3$

(ii) $x^3 = -1 \Rightarrow x = (-1)^{\frac{1}{3}}$

$= (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{3}}$

$= [\cos (2k\pi + \pi) + i \sin (2k\pi + \pi)]^{\frac{1}{3}}$

$= \cos (2k+1)\frac{\pi}{3} + i \sin (2k+1)\frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

இவ்வாறாக 7 மூலங்கள் பெறப்படுகின்றன.

குறிப்பு :

மூலங்கள் $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$; $\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$ $\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$ $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $(\cos \pi + i \sin \pi)$, $\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25 :

$(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}}$-இன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு :

$\sqrt{3} + i = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ என்க.

$\Rightarrow r \cos\theta = \sqrt{3}$, $r \sin \theta = 1$

$\Rightarrow r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$

$\text{Cos } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore (\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left[\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left[\cos(6k+1)\frac{\pi}{9} + i\sin(6k+1)\frac{\pi}{9}\right] \text{ இங்கு } n = 0, 1, 2$$

குறிப்பு : *மதிப்புகள்*

$2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, $2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$, $2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$ *ஆகும்.*

மாற்று முறை :

$$(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left[\cos(12k+1)\frac{\pi}{6} + i\sin(12k+1)\frac{\pi}{6}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left[\cos(12k+1)\frac{\pi}{9} + i\sin(12k+1)\frac{\pi}{9}\right] \text{ இங்கு } k = 0, 1, 2$$

மதிப்புகள் $2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, $2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$,

$2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{25\pi}{9} + i\sin\frac{25\pi}{9}\right)$

i.e., $2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, $2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$, *மற்றும்*

$2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$ இங்கு $\cos\frac{25\pi}{9} + i\sin\frac{25\pi}{9} = \cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}$

ஆகவே இம்முறையிலும் அதே மதிப்புகள் பெறப்படுகின்றன.

குறிப்பு : *இங்கு அடுக்கு 2ஐ உள்ளே கொண்டு வருவதற்கு முன் $2k\pi$ஐ கூட்டினாலும் அதே விடையைத்தான் பெறுகிறோம் என்பது தெளிவாகிறது.*

பயிற்சி 3.5

(1) *எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க.*

(i) $(i)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(8i))^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{\frac{2}{3}}$

(2) ω *என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் மற்றும்*

$x = a + b,\ \ y = a\omega + b\omega^2,\ \ z = aw^2 + b\omega$ *எனில்*

(i) $xyz = a^3 + b^3$

(ii) $x^3 + y^3 + z^3 = 3\,(a^3 + b^3)$ *என நிரூபிக்க.*

(3) $\omega^3 = 1$ *எனில்*

(i) $(a + b + c)\ (a + b\omega + c\omega^2)\ (a + b\omega^2 + c\omega) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(ii) $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^5 = -1$

(iii) $\dfrac{1}{1 + 2\omega} - \dfrac{1}{1 + \omega} + \dfrac{1}{2 + \omega} = 0$ *என நிறுவுக.*

(4) *தீர்க்க* :

(i) $x^4 + 4 = 0$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

(5) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$-ன் *எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க மற்றும் அதன் மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன்* 1 *எனவும் காட்டுக.*

4. பகுமுறை வடிவக்கணிதம்
(ANALYTICAL GEOMETRY)

4.1 அறிமுகம் :

ஏறத்தாழ கி.மு. 430ம் காலத்தைய கணித வரலாற்றுச் சுவடிகளைத் திருப்பிப் பார்க்கையில் ஒரு உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் பல்வேறு வெட்டு முகங்கள் அல்லது கூம்பு வளைவு பற்றிய ஆய்வுகள் தொடங்கியது நமக்குத் தெரிய வருகிறது. இத்தகைய ஆய்வுகள் புள்ளி, மாறுபட்ட கோட்டுச் சோடிகள், இருசமக்கோடுகள் (கீழ் வகுப்புகளில் விளக்கப்பட்டவை) போன்றவற்றையும் வட்டங்கள், பரவளையங்கள், நீள் வட்டங்கள், அதிபரவளையங்கள் என்பவைகளையும் உள்ளடக்கியதாகும்.

இன்றைய ஆயத் தொலைத்தளத்தில் விவரிக்கப்படும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் வரைபடமானது, கிரேக்க வடிவக் கணித முறைப்படி அப்போலோனியஸ் (Apollonius) *என்பவரால் உருவாக்கப்பட்ட கூம்பு வெட்டிகள் பற்றிய ஆய்வாகும். பிளாட்டோ* (Plato)*வின்* (429 – *கி.மு.* 347) *காலத்தைய கிரேக்கக் கணித மேதைகள். இரட்டைக் கூம்பை ஒரு தளம் சரிவாக வெட்டும்போது கிடைக்கப்பெறும் வெட்டுமுகம் ஒரு புள்ளியாகவோ, இரட்டை நேர்க்கோடுகளாகவோ, வட்டங்களாகவோ, பரவளையங்களாகவோ, நீள் வட்டங்களாகவோ, அதிபரவளையங்கள் ஆகவோ கிடைக்கலாம் என விவரித்தனர். எனவேதான் இவ்வகை வளைவரைகளை கூம்பு வளைவுகள் என அழைத்தனர்.*

வடிவக்கணித பிரச்சினைகளைத் தீர்ப்பதற்குரிய சீரான வழிமுறைகளை நிறுவுவதற்கான தேவையின் அடிப்படையில் பகுமுறை வடிவக்கணிதம் வளர்ந்தது. மேலும், நடைமுறைப் பிரச்சினைகளில் சிறப்பு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த சில வளைவரைகளை ஆய்வு செய்யப் பயன்படுத்தும் நோக்கோடு வடிவக்கணிதப் பிரச்சினைகளுக்கு தீர்வு காணப்பட்டது.

இவ்வாறாக, பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் பகுமுறை வடிவக் கணிதம் குறைந்த ஆய்வு நுணுக்கங்களையேக் கொண்டுள்ளது, பண்டைய கிரேக்க (≈ 1 – *கி.மு.* 2) *பாரம்பரிய முறையான பகுமுறை வடிவக் கணிதம் பெர்மேட்*(Fermat), *டி-கார்டே* (Descartes), *கெப்ளர்* (Kepler), *நியூட்டன்* (Newton), *யூலர்* (Euler), *லீப்னிட்ஸ்* (Leibnitz), *லோபிதாள்* (L'Hôpital), *கிளாரட்*(Clairaut), *கிரேமர்* (Cramer) *மற்றும் ஜாகோபிஸ்* (Jacobis) *போன்ற மாபெரும் கணிதமேதைகளால் 17ஆம் நூற்றாண்டின் முதல் பாதியில் முறைப்படியாக மேம்படுத்தப்பட்டது.*

ஜெர்மன் கணிதமேதையும் இயற்பியல் அறிஞருமான ஜொகான்னஸ் கெப்ளர்(Johannes Kepler)*இன் கோள்கள் இயக்கம் பற்றிய எடுகோள்களின் தோற்றத்தின் ஊடாக பகுமுறை வடிவக் கணிதம் பற்றிய ஆய்வு மிகப்பெரும் வெற்றியைக் கண்டது. தலைகீழ் வர்க்க விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு பூமி உள்ளிட்ட அனைத்து கோள்களும் சூரியனைக் குவியமாக வைத்து*

நீள்வட்டப் பாதையில் சுற்றிவருகின்றன எனக் கெப்ளர் குறிப்பிட்டார். இதுவே நியூட்டனின் புவியீர்ப்புக் கொள்கைக்கும் வழிவகுத்து நின்றது.

யூலர் வெளி வளைவரைகள் மற்றும் வளை தளப்பரப்புகள் பற்றிய தனது ஆய்வில் பகுமுறை வடிவக் கணித நுட்பங்களைப் பெருமளவில் பயன்படுத்தினார். ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டீன் (Albert Einstein) தனது சார்புக் கொள்கையில் மேலும் இதனை மேம்படுத்தினார்.

பகுமுறை வடிவக் கணிதத்தின் வளர்ச்சி இன்றைய தொழில், மருத்துவம் மற்றும் அறிவியல் ஆய்வு ஆகியவற்றை பெரிதும் வென்றுவிட்டது என்று சொன்னால் அது மிகையாகாது. கூம்பு வெட்டிகள் பற்றிய விரிவானப் படிப்பைத் தொடங்குவதற்கு முன் அவற்றின் சில பயன்பாடுகளைக் காண்போம்.

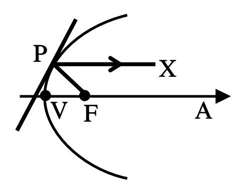
4.1.1 பரவளையத்தின் வடிவக்கணித மற்றும் நடைமுறைப் பயன்பாடுகள் (Geometry and Practical applications of a parabola) :

- ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் முனைப்புள்ளி மற்றும் வேறொரு புள்ளி இவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள தளத்தால் கூம்பு வெட்டப்பட உருவாகும் கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளையமாகும் (படம் 4.1).



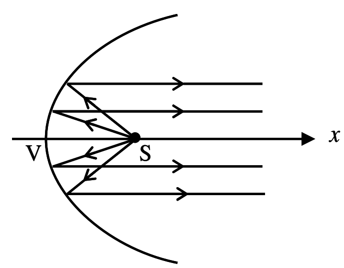
படம் 4.1

- குவியம் F, முனைப்புள்ளி V கொண்ட பரவளையத்தின் மீதான ஏதேனுமொரு புள்ளி P எனில், P மீதான தொடு கோட்டுடன் FP, PX ஆகியன ஏற்படுத்தும் கோணம் சமம் ஆகும். இங்கு PX பரவளைய அச்சு VFAக்கு இணையானது (படம் 4.2).



படம் 4.2

இப்பண்பானது படம் 4.3இல் உள்ளதுபோல் ஒலி, ஒளி மற்றும் வானொலி அலைகளின் தோற்றுவாய் குவியம் Sஇல் இருக்கும்போது இவற்றின் பரவளைய எதிரொளிப்பான்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. (பரவளைய எதிரொளிப்பான் என்பது வெள்ளி முலாம் பூசப்பட்ட பரவளையம் தன் அச்சைப் பற்றி சுற்றுவதால் உருவாகும் வளைதளப் பரப்பாகும்.

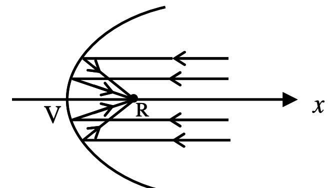


படம் 4.3

குவியம் Sஇலிருந்து எதிரொளிக்கும் பரப்பில் விழும் ஒளி (அல்லது ஒலி அல்லது வானொலி அலைகள்) பரவளையத்தின் அச்சிற்கு இணையாக பிரதிபலிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக டார்ச் விளக்கு, மோட்டார்

வாகனங்களின் முகப்பு விளக்கு, பரவளையக் கண்ணாடிகள் (parabolic mirrors) ஆகியன.

இந்தப் பரவளைய எதிரொளிப்பான் சமிக்கைகளைத் தீவிரப்படுத்தும் விதமாகவும் பயன்படும் (படம் 4.4)இல் காட்டியுள்ளது போல் பரவளைய எதிரொளிப்பானின் அச்சுக்கு இணையாக வந்துசேரும் மின்காந்த அலைகள் குவியம் *S*இல் வைக்கப்பட்டிருக்கும். ஏற்பி *R*ல் குவிக்கப்படும்.



படம் 4.4

எடுத்துக்காட்டாக ரேடியோ தொலைநோக்கி, தொலைக்காட்சி துணைக்கோள் கிண்ண ஏற்பி, சூரிய அடுப்புகள், ரேடார் ஏரியல்கள் போன்றவை.

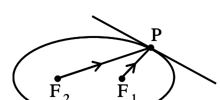
- பரவளைய வடிவில் உள்ள எளிமையான வளைவு மிகப் பலம் வாய்ந்ததாக இருக்கும்.
- சீரான எடைகொண்ட பாலத்தைத் தாங்கும் கம்பி வடத்தின் (பாலத்தின் எடையோடு ஒப்பிடுகையில் கம்பி வடத்தின் எடை விடப்பட வேண்டியது) வடிவம் பரவளையமாகும்.
- எறியப்பட்ட பொருள் அல்லது மேல்நோக்கி வீசப்பட்ட எறிபொருளின் பாதை ஒரு பரவளையமாகும். பறந்து கொண்டிருக்கும் போர் விமானத்திலிருந்து வீசப்படும் குண்டுகள் அல்லது புயல் மழைக் காலங்களில் ஹெலிகாப்டர்களிலிருந்து கீழே விடப்படும் உணவுப் பொட்டலங்கள் கூட பரவளையப் பாதையைப் பின்பற்றும்.
- சில வால் விண்மீன்கள் சூரியனை குவியமாகக் கொண்ட பரவளையப் பாதையைப் பெற்றிருக்கின்றன.

4.1.2 நீள்வட்டத்தின் வடிவக்கணிதம் மற்றும் நடைமுறைப் பயன்பாடுகள் (Geometry and Practical Applications of an ellipse) :

- கூம்பின் ஒரு பகுதியை மட்டும் சரிவாக ஒரு தளம் வெட்டும்போது உருவாகும் கூம்புவெட்டி வளைவரை நீள்வட்டம் எனப்படும். (படம் 4.5)


படம் 4 5

- நீள்வட்டத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளி P மற்றும் F_1, F_2 என்பன அதன் இரண்டு குவிய மையங்கள் எனில், F_1Pம் F_2Pம் Pயிடத்துத் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் சமம் மற்றும் ஒளி அல்லது ஒலியின் ஒரு தோற்றுவாயை ஒரு நீள்வட்ட எதிரொளிப்பானின் ஒரு

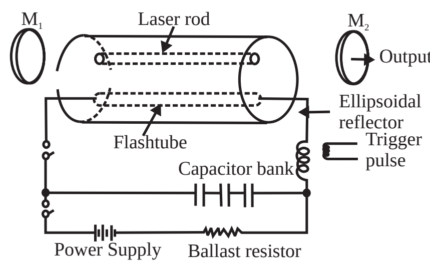


படம் 4.6

குவிய மையத்தில் வைத்தால் எல்லா அலைகளும் மற்ற குவிய மையத்தின் வழியாகக் கடந்துச் செல்லுமாறு பிரதிபலிக்கப்படும் (படம் 4.6) நீளவட்ட எதிரொளிப்பான் என்பது ஒரு நீள்வட்டம் தனது பேரச்சைப் பற்றிச் சுற்றுவதால் உருவாகும் வளைதளப் பரப்பாகும். இப்பண்பானது நீள்வட்ட எதிரொளிப்பான் போன்று வடிவமைக்கப்பட்டிருக்கும் "Wispering Gallery" கூரை அல்லது சுவர்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

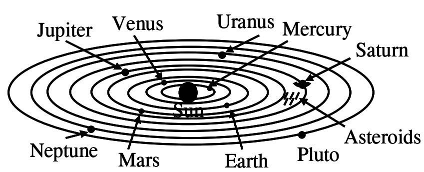
- மருத்துவம், தொழில் மற்றும் அறிவியல் ஆய்வுகளில் மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் Nd : YAG (ND^{3+} நியோடிமியம் அயான்கள் (Neodymium ions) ; YAG – Yttrium Aluminium Garnetz லேசருக்காக நீள்வட்ட எதிரொளிப்பான்கள் வடிவமைக்கப்படுகின்றன.

குறுக்குவெட்டுத் தோற்றம், நீள்வட்டம் பெற்ற குழாய் விளக்கு வடிவத்தில் உள்ள எதிரொளிப்பான்களில் YAG தண்டு உள்ளது மற்றும் நீள் வட்டத்தின் குவியமையத்தில் ஒரு நேர்க்கோட்டு மின்னல் விளக்கு வைக்கப்பட்டிருக்கும் (படம் 4.7). விளக்கிலிருந்து வெளிப்படும் ஒளியானது Nd : YAG தண்டோடு பிணைக்கப்பட்டு லேசர் கதிர் கற்றைகள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன.

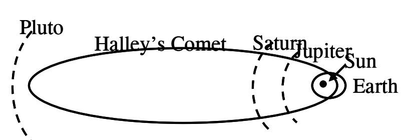


படம் 4.7

- ஃபோர்-சோமர்பீல்டு (Bohr-Sommerfeld) அணுக்கோட்பாட்டில் எலக்ட்ரானின் சுற்றுவட்டப்பாதை வட்டம் அல்லது நீள்வட்டமாகும்.
- சூரியக் குடும்பத்தில் உள்ள நமது கோளாகிய பூமி மற்றும் இதர கோள்கள், சிறு கோள்கள் எல்லாவற்றின் சுற்றுப்பாதையும் சூரியனை குவிய மையமாகக் கொண்ட நீள்வட்டமாகம். சூரியக் குடும்பத்தில் உள்ள அனைத்துக் கோள்களின் செயற்கை அல்லது இயற்கைத் துணைக் கோள்களும் (தலைகீழ் வர்க்க விதிக்குட்பட்ட விசையுடன்) நீள்வட்டச் சுற்றுப்பாதையை பெற்றுள்ளன (படம்4.8(a))



படம் 4.8(a)



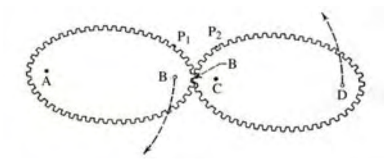
படம் 4.8(b)

எழுபத்தைந்து ஆண்டுகளுக்கொருமுறை திரும்பத் தோன்றும் ஹாலேயின் வால் நட்சத்திரத்தின் (Path of Halley's Comet)

சுற்றுப்பாதையும் மையக் கோட்டம் e ≈ 0.97 கொண்ட நீள்வட்டமாகும். [படம் 4.8 (b)].

- நீள்வட்ட வளைவுகள் அவற்றின் அழகுக்காகவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

- நீராவிக் கொதிகலன்களின் தலைப்பாகம் நெட்டச்சு மற்றும் குற்றச்சுகளின் நீளம் 2 : 1 என்ற விகிதம் கொண்ட நீள் வட்டமாக வடிவமைக்கப்பட்டால் அதிக பலம் வாய்ந்ததாக இருக்கும் என நம்பப்படுகிறது.



படம் 4.9

⋆ சில நேரங்களில் (சிறப்புத் தேவைக்காக) துணைப் பொறிகள் (gears) நீள்வட்ட வடிவில் உண்டுபண்ணப்படுகின்றன. (படம் 4.9)



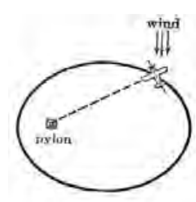
படம் 4.10

- கோகூடக்(Comet Kohoutek)கின் வால் விண்மீன் நட்சத்திரத்தின் சுற்றுப்பாதை மையக்கோட்டம் e ≈ 0.9999 கொண்ட நீள்வட்டமாகும். (படம் 4.10).

- நாம் வாழும் கோளாகிய பூமி சாய்ந்த கோளமாகும். அதாவது நீள்வட்டம் தனது சிற்றச்சைப் பற்றிச் சுற்றுவதால் உருவாகும் திண்மம். இந்தச் சாய்வுக் கோளமானது நிலநடுக்கோட்டுப் பகுதியில் புடைத்தும், துருவப் பகுதியில் தட்டையாகவும் இருக்கும்.

- நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் விமானத்தாங்கியை விட்டுப் பறந்துச் செல்லும் விமானம் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் மீண்டும் தரையிறங்கும் விமானத்தின் செயற்பாட்டுப் பகுதியானது, பறக்க ஆரம்பிக்கும் நிலை மற்றும் தரையிறங்கும் புள்ளி ஆகியவற்றை குவியங்களாய்க் கொண்ட நீள்வட்டமாகும்.

- மாறாத் திசைவேகம் பெற்ற வீசும் காற்றில் பறந்து ஆன்-பைலான் (On-pylon) திருப்பத்தை ஏற்படுத்தும் விமானத்தின் பாதை பைலானுக்கு நேர் மேலே குவியம் கொண்ட நீள்வட்டமாகும். (படம் 4.11).



படம் 4.11

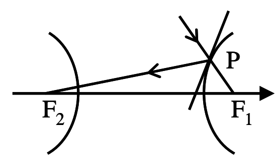
4.1.2 ஒரு அதிபரவளையத்தின் வடிவக் கணிதம் மற்றும் நடைமுறைப் பயன்பாடுகள் (Geometry and Practical Applications of a Hyperbola):

- *ஒரு இரட்டைக் கூம்பு தன் அச்சிற்கு இணையாக ஒரு தளத்தால் வெட்டப்படும்போது உருவாகும் கூம்பு வளைவு ஒரு அதிபரவளையமாகும். (படம் 4.12)*



படம் 4 12

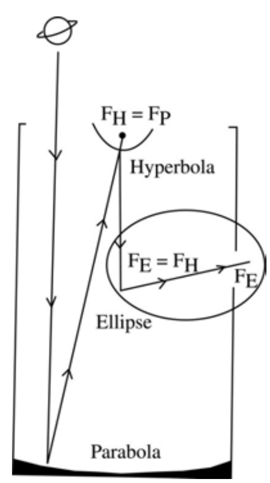
- *குவியங்களிலிருந்து அதிபரவளையத்தின் மீதான ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு வரையப்படும் நேர்க்கோடுகள் அப்புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் சமம். எனவே அதிபரவளையம் தன் குறுக்கச்சைச் சுற்றுவதால் உருவாகும் அதிபரவளைய எதிரொளிப்பானின் ஒரு குவியத்தில் குவியும் எல்லா ஒளிக்கற்றைகளும் அடுத்த குவியத்திற்கு எதிரொளிக்கப்படுகின்றன (படம் 4.13).*



படம் 4. 13

- *எதிரொளிக்கும் இப்பண்பானது பரவளைய எதிரொளிப்பானுடன் கூடிய தொலைநோக்கிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அமெரிக்க விண்வெளி ஆராய்ச்சி நிறுவனமான* NASA *ஹப்பிள்* (Hubble) *தொலைநோக்கியில் பரவளைய எதிரொளிப்பான்களுடன் கூடிய அதிபரவளைய எதிரொளிப்பான்களில் எதிரொளிக்கும் பண்பையும் பயன்படுத்துகிறது. (படம் 4.14).*

- *அதிபரவளையங்கள் வீச்சு கண்டுபிடிக்கப் பயன்படுகிறது. (வெவ்வேறான இரண்டு இடங்களிலில் இருந்து கேட்கப்படும் ஒலியின் நேரங்களின் வித்தியாசம் ஒலி எழும்பும் இடத்திலிருந்து ஒலி கேட்கும் இடங்களின் தூரங்களின் வித்தியாசத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.*



படம் 4.14

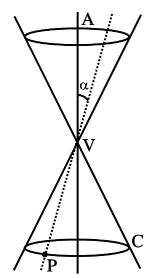
மூன்றாவது ஒலி கேட்குமிடம் மற்றொரு அதிபரவளையத்தைத் தருகிறது மற்றும் ஒலி எழும்பும் இடமானது இரண்டு அதிபரவளையங்களும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியாகும்).

- pv = மாறிலி எனும் பாயிலின் விதி அதிபரவளையத்தைக் குறிப்பதாகும். ஒன்றுக்கொன்று எதிர்விகிதத்தில் இருக்கும் இரண்டு மாறிகளின் தொடர்பு ஒரு அதிபரவளையமாகும்.

- ஐன்ஸ்டினின் சார்புக் கொள்கையில் எழும் அதிபரவளையப் பாதைகள் தொலை வீச்சு வானொலி அதிர்வெண் தெரிமுறையான LORAN (Long Range Navigation)க்கு அடிப்படையாக அமைகிறது.

4.2 கூம்பு வளைவுகள் : வரையறை (Definition of a Conic) :

வட்டம் C-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். வட்டத்தின் மையம் வழியாகவும் அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லும் நேர்க்கோட்டை A என்போம். V ஆனது C-இன் தளத்தில் அல்லாத A-இன் மீதான புள்ளி. வட்டத்தின் மீதான ஏதேனுமொரு புள்ளியை P என்க. புள்ளிகள் P மற்றும் V வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டை வரைக.

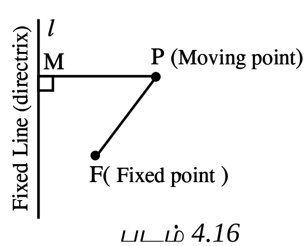


படம் 4.15

இப்போது P ஆனது C-ஐச் சுற்றிவர உருவாகும் வளைதளப்பரப்பே ஒரு உள்ளீடற்ற நேர்வட்ட இரட்டைக் கூம்பு ஆகும். ஒவ்வொரு நேர்க்கோடு PV-ம் அதன் ஆக்கி எனப்படும் கூம்பின் அச்சிற்கும் ஆக்கி PV-க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் α உச்சிக் கோணம் (அரை உச்சிக் கோணம்) எனப்படும். உச்சியில் சந்திக்கும் கூம்பின் மேல் மற்றும் கீழ் பகுதிகள் அதன் னேப்பிகள் (nappes) எனப்படும் (படம் 4.15).

உச்சி வழியாகச் செல்லாத ஒரு தளத்தால் இரட்டைக் கூம்பு வெட்டப்படக் கிடைக்கும் வளைவரைகள் குவிய கூம்பு வளைவுகள் அல்லது கூம்பு வெட்டிகள் எனப்படும்.

வரைப்பட வடிவமுறைக் கணிதத்தில் கூம்பு வளைவுகள் இவ்வாறாக வரையறுக்கப்படினும் பகுமுறை வடிவக் கணித ரீதியாக பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.



படம் 4.16

F, P என்பன ஒரு தளத்தின் நிலை மற்றும் நகரும் புள்ளிகள். Pஇலிருந்து நிலைப்புள்ளி F-இன் தூரத்திற்கும்

அத்தளத்திலுள்ள நிலைக்கோடு l-இலிருந்து Pஇன் தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் மாறிலியாக இருக்குமாறு நகரும் Pஇன் நியமப்பாதை பொதுக்குவிய கூம்பு வளைவுகள் எனப்படும். (படம் 4.16)

நிலைப்புள்ளி F குவியம் எனவும் நிலைக்கோடு l இயக்குவரை எனவும் மாறிலி விகிதம் e மையத் தொலைத்தகவு எனவும் அழைக்கப்படும்.

படத்திலிருந்து $\frac{FP}{PM}$ = மாறிலி = e

4.2.1. கூம்பு வளைவின் பொதுச் சமன்பாடு (General equation of a Conic) :

கூம்பு வளைவின் குவியம் $F(x_1, y_1)$, இயக்குவரை 'l'இன் சமன்பாடு $lx + my + n = 0$ மேலும் மையத் தொலைத் தகவு 'e' என்க.

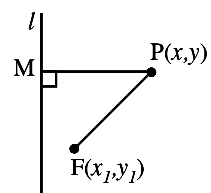
கூம்பு வளைவின் மேல் உள்ள எதேனும் ஒரு புள்ளியை $P(x, y)$ என்க. Pயிலிருந்து 'l'க்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைக.

PM = Pயிலிருந்து $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டிற்குள்ள செங்குத்து தூரம்

$$FP = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

PM = Pயிலிருந்து $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டிற்குள்ள செங்குத்து தூரம் $P(x, y)$

$$= \pm \frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$



படம் 4.17

கூம்பு வளைவின் வரையறையின்படி $\frac{FP}{PM} = e$ $\quad \therefore FP^2 = e^2 PM^2$

$$\therefore (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2 \left[\pm \frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right]^2$$

இதைச் சுருக்குவதன் மூலம் $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ என்ற வடிவில் உள்ள x மற்றும் yஆல் ஆன இருபடிச் சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

4.2.2. கூம்பு வளைவின் பொது சமன்பாட்டினைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துதல் :

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு சிதைந்த அல்லது சிதையாத கூம்பு வளைவை குறிக்கட்டும். இது ஒரு கூம்பு வளைவாக இருக்கும்போது

(i) $B^2 - 4AC = 0$ எனில் இது ஒரு பரவளையம்

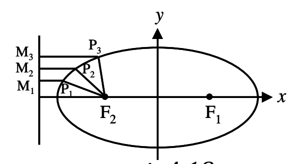
(ii) $B^2 - 4AC < 0$ எனில் இது ஒரு நீள்வட்டம்

(iii) $B^2 - 4AC > 0$ எனில் இது ஒரு அதிபரவளையம் ஆகும்.

4.2.3. மையத் தொலைத் தகவைப் பொறுத்து கூம்பு வளைவினை வகைப்படுத்துதல் :

(i) $e < 1$ எனில் கூம்பு வளைவு ஒரு நீள்வட்டம் ஆகும். படம் 4.18இலிருந்து F_2P_i ஆனது P_iM_iஐ விட எப்போதும் சிறியதாகவே இருக்கும் என்பதனைக் காண்க.

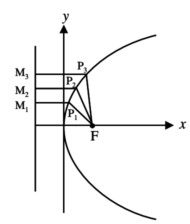
(அ.து.), $\dfrac{F_2P_i}{P_iM_i} = e < 1$, $(i = 1, 2, 3)$



படம் 4.18

(ii) $e = 1$ எனில், கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளையம் ஆகும். படம் 4.19இலிருந்து FP_i மற்றும் P_iM_i எப்போதும் சமமாகவே இருக்கும்.

(அ.து.), $\dfrac{FP_i}{P_iM_i} = e = 1$, $(i = 1, 2, 3)$

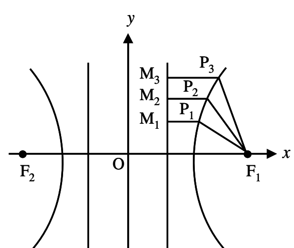


படம் 4.19

(iii) $e > 1$ எனில் கூம்பு வளைவு ஒரு அதிபரவளையம் ஆகும். படம் 4.20இலிருந்து F_1P_i ஆனது P_iM_iஐ விட எப்போதும் பெரிதாகவே இருக்கும் என்பதனைக் காண்க.

(அ.து.), $\dfrac{F_1P_i}{P_iM_i} = e > 1$,

$(i = 1, 2, 3)$



படம் 4.20

4.3 பரவளையம் (Parabola) :

ஒரு புள்ளியானது நிலைப்புள்ளியிலிருந்து அதற்கு உள்ள தொலைவும், நிலைக் கோட்டிலிருந்து அதற்கு உள்ள தொலைவும் சமமாக இருக்குமாறு நகருமாயின் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு பரவளையாகும். அதாவது மையத்தொலைத் தகவின் மதிப்பு 1 என இருக்கும் கூம்பு வளைவு பரவளையமாகும்.

குறிப்பு : பாடத்திட்டத்தின்படி சமன்பாட்டின் வரைமுறை* (4.3.1, 4.3.2) *மற்றும் பரவளையத்தினை வரையும் முறை தேவையில்லை. சமன்பாட்டின் அமைப்பு மற்றும் அதன் வளைவரையின் அமைப்பு மட்டுமே தேவை. இருப்பினும், கற்றல் திறனை அதிகரிக்கும் நோக்குடன் சமன்பாட்டின் வரைமுறையும் வளைவரையின் போக்கும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

4.3.1 பரவளையச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவம்

(Standard equation of a parabola) :

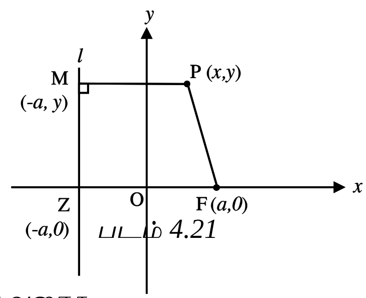
கொடுக்கப்படுவன :

★ நிலைப்புள்ளி (F)

★ நிலைக்கோடு (l)

★ மையத் தொலைத்தகவு ($e = 1$)

★ நகரும் புள்ளி $P(x, y)$



படம் 4.21

வரைமுறை :

★ நிலைப்புள்ளி Fஐ குறிக்க மற்றும் நிலைக்கோடு 'l'ஐ வரைக.

★ Fஇலிருந்து lக்கு ஒரு குத்துக்கோடு (FZ) வரைக.

★ $FZ = 2a$ என எடுத்துக் கொண்டு அதனை x-அச்சாகத் தெரிவு செய்க..

★ FZக்கு மையக் குத்துக்கோட்டை வரைந்து அதனை y-அச்சாகத் தெரிவு செய்க.

★ $V(0, 0)$ ஆதிப்புள்ளி எனக் கொள்க.

★ P-இலிருந்து lக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு (PM) வரைக.

★ நாமறிந்தவை $F(a, 0)$, $Z(-a, 0)$. எனவே M என்பது $(-a, y)$ ஆகும்.

வரையறையின்படி $\quad \dfrac{FP}{PM} = e = 1 \;\Rightarrow\; FP^2 = \mathrm{PM}^2$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2 + (y-y)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$y^2 = 4ax.$$

இதுவே பரவளையச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவமாகும். வளைவரை வரைவதற்கு அத்தியாயம் 6-இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள உத்திகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

4.3.2 $y^2 = 4ax$ *என்ற பரவளையத்தை வரைதல்* :

(i) *சமச்சீர் தன்மை* (Symmetry property) : x-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீரானது. அதாவது, x-அச்சானது வளைவரையை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

(ii) *சிறப்புப் புள்ளிகள்* (Special points) : $(0, 0)$-ஆனது $y^2 = 4ax$-ஐ நிறைவு செய்வதால், பரவளையமானது ஆதி வழியே செல்கின்றது.

அது x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்பதற்கு $y = 0$ எனப் பிரதியிட $x = 0$ மட்டுமே கிடைக்கிறது.

∴ பரவளையம் x-அச்சை வெட்டும் புள்ளி ஆதி (0, 0) ஆகும்.

y-அச்சை வெட்டும் புள்ளி காண்பதற்கு $x = 0$ எனப் பிரதியிட, $y = 0$ மட்டுமே கிடைக்கின்றது.

∴ பரவளையம் y-அச்சை ஆதி (0, 0)யில் வெட்டுகின்றது.

(iii) வளைவரையின் போக்கு (Existence of the curve) :

$x < 0$ எனில் y^2-இன் மதிப்பு ஒரு குறை எண். அதாவது. y கற்பனையானது. எனவே வளைவரை x-இன் குறை மதிப்புகளுக்கு அமையாது. அதாவது, வளைவரை குறையற்ற மிகை மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே அமையும்.

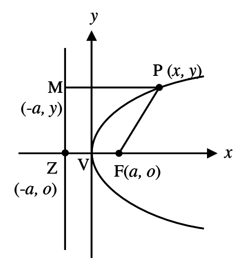
(iv) கந்தழியில் வளைவரை (The curve at infinity) :

x அதிகரிக்க, y^2-ம் அதிகரிக்கும்.

அதாவது, $x \to \infty$ எனில் $y^2 \to \infty$

அதாவது, $x \to \infty$ எனில், $y \to \pm\infty$

∴ வளைவரை வலதுபக்கம் திறந்து இருக்கும். [படம் 4.22]



படம் 4.22

4.3.1 பரவளையத்தைப் பொறுத்து முக்கியமான வரையறைகள் :

குவியம் : பரவளையம் வரையப் பயன்படும் நிலையான புள்ளி குவியம் (F) என்கிறோம். இங்கு குவியம் $F(a, 0)$ ஆகும்.

இயக்குவரைக் கோடு : பரவளையம் வரையப் பயன்படும் நிலையான கோடு ரவளையத்தின் இயக்குவரை என்கிறோம். இங்கு இயக்குவரையின் கோட்டின் சமன்பாடு $x = -a$.

அச்சு : பரவளையம் எந்த அச்சுக்ககு சமச்சீராக உள்ளதோ அவ்வச்சு பரவளையத்தின் அச்சாகும். வளைவரை $y^2 = 4ax$ என்பது x-அச்சை பொறுத்து சமச்சீரானது. மேலும் x-அச்சு (அல்லது $y = 0$) ஆனது பரவளையம் $y^2 = 4ax$-இன் அச்சாகும். பரவளையத்தின் அச்சானது குவியம் வழியேச் செல்கின்றது. மேலும் இயக்குவரைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ளது.

முனை (உச்சி): பரவளையம் மற்றும் அதன் அச்சு வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி முனைப் புள்ளியாகும். இங்க முனைப்புள்ளி $V(0, 0)$ ஆகும்.

குவி தூரம் : குவியத்துக்கும் பரவளையத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு குவிதூரம் எனப்படும்.

குவி நாண் : பரவளையத்தின் குவியம் வழியேச் செல்லும் நாண் அப்பரவளையத்தின் குவி நாண் எனப்படும்.

செவ்வகலம் : இது பரவளையத்தின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக உள்ள ஒரு குவிநாண் ஆகும். இங்கு செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x = a$ ஆகும்.

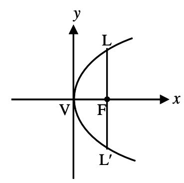
செவ்வகலத்தின் முனைப் புள்ளிகளும் அதன் நீளமும் :

செவ்வகலத்தின் முனைப்புள்ளிகள் காண்பதற்கு $x = a$ மற்றும் $y^2 = 4ax$களை தீர்வு காண்க.

$x = a$ வை $y^2 = 4ax$இல் பிரதியிட

$y^2 = (4a)a = 4a^2$

$\therefore y = \pm 2a$



படம் 4.23

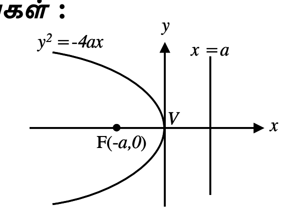
L மற்றும் L' செவ்வகலத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் L என்பது $(a, 2a)$ மற்றும் L' என்பது $(a, -2a)$ ஆகும். செவ்வகலத்தின் நீள $= LL' = 4a$. அரைச் செவ்வகலத்தின் நீளம்$= FL = FL' = 2a$. இதுவரை நாம் வலதுபக்கம் திறந்து இருக்கும் பரவளையத்தின் திட்டவடிவத்தைக் கண்டோம். இதேப்போல் நமக்கு இடதுபக்கம் திறந்து, மேல்பக்கம் திறந்து, கீழ்ப்பக்கம் திறந்து இருக்கக்கூடிய பரவளையங்களும் உள்ளன.

4.3.4 பரவளையத்தின் பிற திட்ட வடிவங்கள் :

1. இடதுபக்கம் திறப்புடையது :

$\mathbf{y^2 = -4ax\ [a > 0]}$

$x > 0$ எனில் y கற்பனையானது. அதாவது, வளைவரை $x > 0$விற்கு அமையாது. அதாவது, $x \leq 0$விற்கு வளைவரை அமையும்.

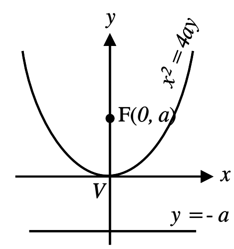


படம் 4.24

2. மேற்பக்கம் திறப்புடையது :

$\mathbf{x^2 = 4ay\ [a > 0]}$

$y < 0$ எனில், x கற்பனையானது. அதாவது, வளைவரை $y < 0$விற்கு அமையாது. அதாவது, வளைவரை $y \geq 0$விற்கு அமையும்.

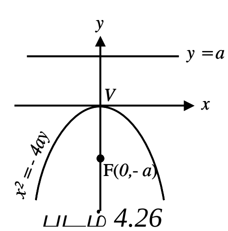


படம் 4.25

3. கீழ்ப்பக்கம் திறப்புடையது :

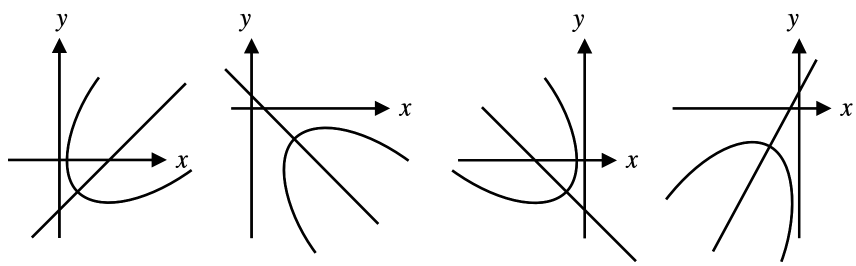
$\mathbf{x^2 = -4ay\ [a > 0]}$

$y > 0$ எனில் x கற்பனையானது. அதாவது, வளைவரை $y > 0$விற்கு அமையாது. அதாவது, $y \leq 0$விற்கு வளைவரை அமையும்.



படம் 4.26

மேற்குறிப்பு : *இதுவரை நாம் நான்கு வகையான பரவளையத்தின் திட்ட வடிவங்களைப் பற்றிப் பார்த்தோம். மேலும் இந்த திட்ட வடிவங்களில் அமையாத பலவகையான பரவளையங்களும் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, சில பரவளையங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.*



படம் 4.27

மேலே குறிப்பிட்ட பரவளையங்களுக்கு அச்சுகள் x-அச்சுக்கோ அல்லது y-அச்சுக்கோ இணையாக காணப்படவில்லை, இவ்வகையான பரவளையங்களின் சமன்பாடுகளில் xy உறுப்பு காணப்படும். இவ்வகையான பரவளையத்தின் சமன்பாடுகள் நம் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது. இருப்பினும் நாம் இங்கு இவ்வகையான பரவளையங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம். திட்ட வடிவத்தில் உள்ள பரவளையங்களின் அச்சுகள் x-அச்சுக்கோ அல்லது y-அச்சுக்கோ இணையாக இருக்கும் என்பதைக் காணலாம். இவ்வகையான நான்கு வகை பரவளையங்களைப் பற்றி மட்டுமே நாம் படிப்போம்.

இதுவரை நாம் பார்த்த பரவளையங்களில் எல்லாம் முனை ஆதியில் காணப்படுகிறது. பொதுவாக ஒரு பரவளையத்தின் முனை ஆதியில் இருக்க வேண்டும் என்பது தேவையில்லை. எனவே இவ்வகைகளை ஆராய ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல் அல்லது அச்சுக்களை இடப்பெயர்ச்சி செய்தல் என்ற கொள்கைகள் தேவைப்படுகின்றன.

4.3.5 ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல் அல்லது அச்சுக்களை இடப்பெயர்ச்சி செய்தல் முறை

(The process of shifting the origin or translation of axes) :

xoy அமைப்பில் x-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக. (X-அச்சு என்க) மற்றும் y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக (Y-அச்சு என்க). P(x, y) என்ற புள்ளியை xoy அமைப்பில் எடுத்துக் கொள்க. அதே புள்ளி XOY அமைப்பில் P(X, Y) என்க.

xoy-இன் அமைப்பில் O′-இன் அச்சுத்தூரங்கள் (h, k) என்க.

xoy அமைப்பில் *P*-இன் புதிய அச்சுத் தூரங்கள்

$OL = OM + ML = h + X$

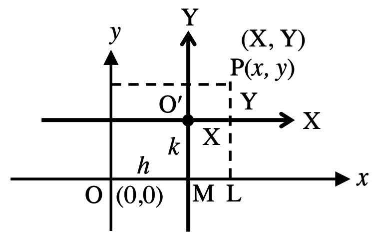
$x = X + h$

இதே போல் $y = Y + k$

$\therefore$ *XOY* அமைப்பில் *P*இன் புதிய ஆய அச்சுத் தூரங்கள்.

$X = x - h$

$Y = y - k$



படம் 4.28

4.3.6 பரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் – வலதுபுறம் திறப்புடையது [அதாவது, முனை ஆதியில் அமையாதது]

XOY அமைப்பில் முனை *V* (0, 0) இருக்குமாறு ஒரு பரவளையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம், இதன் அச்சுத் தூரம் *xoy* அமைப்பில் (h, k) என்க.

இந்த பரவளையம் *XOY* அமைப்பில் வலதுபுறம் திறப்புடையது. எனவே இதன் சமன்பாடு $Y^2 = 4aX$ ஆகும்.

ஆதியை இடமாற்றம் செய்வதால்

$X = x - h$ மற்றும் $Y = y - k$ ஆகிறது. *xoy* அமைப்பில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(y - k)^2 = 4a(x - h)$.

இதுவே வலதுபுறம் திறப்புடைய பரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் ஆகும். இதேபோல் மற்ற பொது வடிவங்கள்

$(y - k)^2 = - 4a\ (x - h)$ (இடதுபக்கம் திறப்புடையது)

$(x - h)^2 = 4a\ (y - k)$ (மேல்பக்கம் திறப்புடையது)

$(x - h)^2 = - 4a\ (y - k)$ (கீழ்ப்பக்கம் திறப்புடையது)

குறிப்பு : முனை (h, k) எனில், பொது வடிவம் பெற *x*ஐ $x - h$ ஆகவும் மற்றும் *y*ஐ $y - k$ஆகவும் மாற்றம் செய்க.

மேற்குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்ட அமைப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளில் *xy* உறுப்பு காணப்படாததை அறிக.

எடுத்துக்காட்டு 4.1: கொடுக்கப்பட்ட குவியம் மற்றும் இயக்குவரைகளுக்கு பரவளையங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $(a, 0)$; $x = - a$ $a > 0$

(ii) $(- 1, - 2)$; $x - 2y + 3 = 0$

(iii) $(2, - 3)$; $y - 2 = 0$

தீர்வு: (i) *பரவளையத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி* $P(x, y)$ *என்க. இயக்குவரைக்கு* PM *ஆனது செங்குத்து எனில்,*

$$\frac{FP}{PM} = e = 1$$

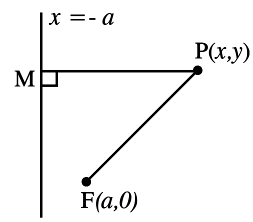
$$\Rightarrow \quad FP^2 = PM^2$$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = \left(\pm\frac{x+a}{\sqrt{1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 4ax$$

இதுவே தேவையான சமன்பாடாகும்.



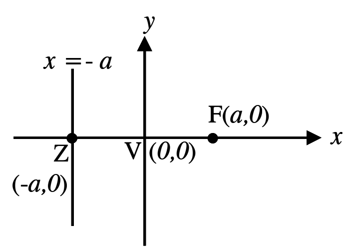
படம் 4.29

மாற்று முறை :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலில் இருந்து இந்த பரவளையம் வலதுபக்கம் திறப்புடையதாக அமைகின்றது.

$\therefore$ *பரவளையத்தின் சமன்பாட்டின் அமைப்பு* $(y-k)^2 = 4a\,(x-h)$

Z(– a, 0) *மற்றும் குவியம்* F(a, 0) *என்பதன் மையம் பரவளையத்தின் முனை என்பது நமக்குத் தெரிந்ததே. இங்கு* Z *என்பது* x-*அச்சு மற்றும் இயக்குவரையும் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்*



படம் 4.30

$\therefore$ *முனை* $\left(\frac{-a+a}{2}, \quad \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0) = (h, k)$

மேலும் முனை மற்றும் குவியத்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $VF = a$

$\therefore$ *தேவையான சமன்பாடு* $(y-0)^2 = 4a\,(x-0)$ *அதாவது,* $y^2 = 4ax$

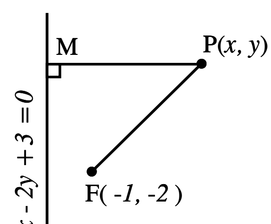
(ii) *பரவளையத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி* $P(x, y)$ *என்க.* PM *ஆனது இயக்குவரைக்குச் செங்குத்து எனில்,*

$$\frac{FP}{PM} = e = 1$$

$$\Rightarrow \quad FP^2 = PM^2$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = \left(\pm\frac{x-2y+3}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$$



படம் 4.31

குறிப்பு : இங்கு இயக்குவரை x-அச்சுக்கோ அல்லது y-அச்சுக்கோ இணையாக இல்லை. மேலும் இந்த வகை திட்டவடிவில் இல்லை. எனவே இவ்வகை கணக்குகளை மேற்குறிப்பிட்ட மாற்று முறையில் செய்ய இயலாது.

(iii) பரவளையத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி $P(x, y)$ என்க. PM ஆனது இயக்குவரைக்குச் செங்குத்து எனில்,.

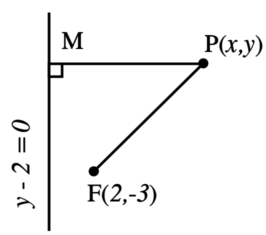
$$\frac{FP}{PM} = e = 1$$

$$\Rightarrow \quad FP^2 = PM^2$$

$$\text{i.e., } (x-2)^2 + (y+3)^2 = \left(\pm \frac{y-2}{\sqrt{1}}\right)^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 10y + 9 = 0$$



படம் 4.32

குறிப்பு : இங்கு இயக்குவரை $y = 2$, x-அச்சுக்கு இணை. எனவே இது திட்ட அமைப்பை உடையது. எனவே, இந்த கணக்கை மாற்றுமுறை 4.1(i) மூலம் தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.2 :

பரவளையத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) முனை (0, 0) மற்றும் குவியம் $(-a, 0)$, $a > 0$

(ii) முனை (4, 1) மற்றும் குவியம் (4, – 3)

தீர்வு :

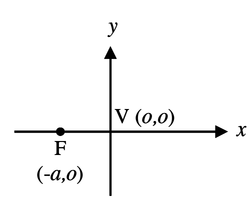
(i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி பரவளையம் இடதுபக்கம் திறப்புடையது.

எனவே பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ என்ற அமைப்புடையது. இங்கு முனை (h, k) என்பது (0, 0) மற்றும் $VF = a$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$$(y-0)^2 = -4a(x-0)$$

$$y^2 = -4ax$$



படம் 4.33

(ii) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி பரவளையமானது கீழ்நோக்கித் திறப்புடையதாக உள்ளது.

$\therefore$ சமன்பாடு

$(x-h)^2 = -4a\,(y-k)$ என்ற அமைப்புடையது. இங்கு முனை (h, k) என்பது $(4, 1)$ மற்றும் முனைக்கும் குவியத்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம்

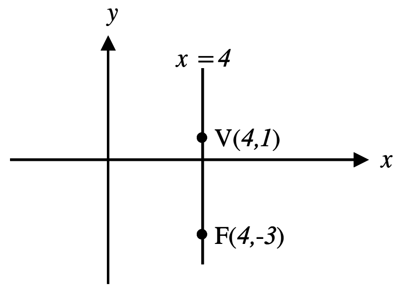
$VF = a$

$\Rightarrow \sqrt{(4-4)^2 + (1+3)^2} = 4 = a$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$(x-4)^2 = -4(4)\,(y-1)$

$(x-4)^2 = -16(y-1)$



படம் 4.34

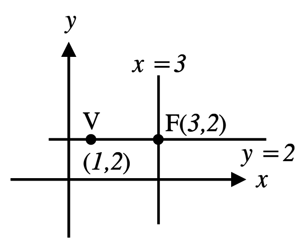
எடுத்துக்காட்டு 4.3: முனை (1, 2) மற்றும் செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x = 3$ எனில், பரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி இந்த பரவளையம் வலப்பக்கம் திறப்புடையதாக உள்ளது.

$\therefore$ சமன்பாடு $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ என்ற வடிவில் உள்ளது. இங்கு முனை (h, k) என்பது (1, 2)இலிருந்து செவ்வ-கலத்துக்கு ஒரு செங்குத்து வரைக. இது குவியம் வழியாகச் செல்கிறது.

$\therefore F$ என்பது (3, 2)

மேலும் $VF = a = 2$



படம் 4.35

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$(y-2)^2 = 4(2)\,(x-1)$

$(y-2)^2 = 8(x-1)$

எடுத்துக்காட்டு 4.4: முனை (2, 1) உடையதும், (6, 5) என்ற புள்ளி வழியே செல்வதும், வலதுபக்கம் திறப்புடையதுமான பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : வளைவரை வலதுபுறம் திறப்புடையதாக இருப்பதால் அதன் வடிவம் $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ ஆகும்.

முனை $V(h, k)$ என்பது $(2, 1)$

$$\therefore\ (y-1)^2 = 4a\,(x-2)$$

இது $(6, 5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore\ 4^2 = 4a\,(6-2) \quad \Rightarrow\ a = 1$$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $(y-1)^2 = 4(x-2)$

எடுத்துக்காட்டு 4.5 : முனை $(-1, -2)$, செவ்வகலத்தின் நீளம் 4 மற்றும் மேற்புறம் திறப்புடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : வளைவரை மேற்புறம் திறப்புடையதாக இருப்பதால் அதன் வடிவம்

$$(x-h)^2 = 4a(y-k) \text{ ஆகும்.}$$

செவ்வலகத்தின் நீளம் $= 4a = 4$ எனவே $a = 1$

உச்சி $V\,(h, k)$ என்பது $(-1, -2)$

$$\therefore \text{ தேவையான சமன்பாடு } (x+1)^2 = 4\,(y+2)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.6 : உச்சி $(2, 0)$ மற்றும் இயக்குவரைக்கும் செவ்கலத்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 2 மற்றும் இடதுபுறம் திறப்புடையதுமான பரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு: வளைவரையானது இடதுபுறம் திறப்புடையதாக இருப்பதால் அதன் வடிவம் $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ ஆகும்.

இங்கு முனை $V(h, k)$ என்பது $(2, 0)$

இயக்குவரைக்கும் செவ்வகலத்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $2a = 2$

எனவே $a = 1$ தேவையான பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(y-0)^2 = -4(1)\,(x-2)$$

$$\text{அல்லது } y^2 = -4(x-2)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.7 : பின்வரும் பரவளையங்களுக்கு அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரை, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் காண்க. மேலும் அவ்வளைவரைகளை வரைக.

(i) $y^2 = 4x$ (ii) $x^2 = -4y$ (iii) $(y+2)^2 = -8(x+1)$

(iv) $y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ (v) $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$

தீர்வு :

(i) $y^2 = 4x$

$$(y-0)^2 = 4(1)\,(x-0)$$

இங்கு (h, k) என்பது $(0, 0)$ மற்றும் $a = 1$

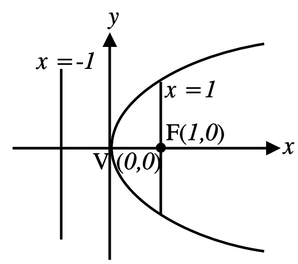
அச்சு : x-அச்சுடன் சமச்சீர் கொண்டது.

முனை : முனை $V(h, k)$ என்பது $(0, 0)$

குவியம் : குவியம் $F(a, 0)$ என்பது $(1, 0)$

இயக்குவரை : இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -a$ அதாவது, $x = -1$

செவ்வகலம் : செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x = a$ (அ.து.), $x = 1$



படம் 4.36

மேலும் இதன் நீளம் $4a = 4(1) = 4$ $\therefore$ பரவளையம் படம் 4.36இல் வரையப்பட்டது போல் அமையும்.

(ii) $x^2 = -4y$

$(x-0)^2 = -4(1)(y-0)$

இங்கு (h, k) என்பது $(0, 0)$ மற்றும் $a = 1$

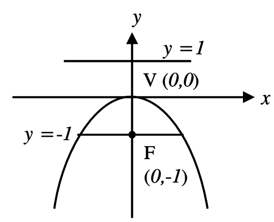
அச்சு : y-அச்சு அல்லது $x = 0$

முனை : $V(0, 0)$

குவியம் : $F(0, -a)$ அதாவது, $F(0, -1)$

இயக்குவரை : $y = a$ அதாவது $y = 1$

செவ்வகலம் : $y = -a$ அதாவது $y = -1$



படம் 4.37

$\therefore$ பரவளையம் படம் 4.37-இல் வரையப்பட்டது போல் அமையும்.

(iii) $(y+2)^2 = -8(x+1)$

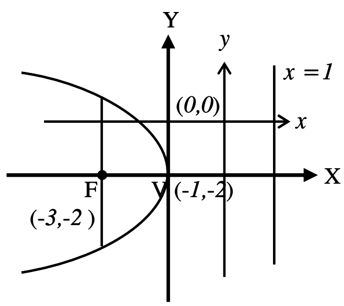
$Y^2 = -8X$ இங்கு $X = x + 1$, $Y = y + 2$

$Y^2 = -4(2)X$ $\therefore a = 2$

$\therefore$ இடதுபுறம் திறப்புடைய வடிவில் அமைகிறது.

	X, Yஐப் பொறுத்து	x, yஐப் பொறுத்து $X = x + 1, Y = y + 2$
அச்சு	$Y = 0$	$Y = 0 \Rightarrow y + 2 = 0$
முனை	$(0, 0)$	$X = 0$; $Y = 0$ $\Rightarrow x + 1 = 0$; $y + 2 = 0$ $x = -1, \quad y = -2$ $\therefore V(-1, -2)$
குவியம்	$(-a, 0)$ i.e. $(-2, 0)$	$X = -2$; $Y = 0$ $\Rightarrow x + 1 = -2, y + 2 = 0$ $x = -3, y = -2$ $F(-3, -2)$

இயக்குவரை	$X = a$ i.e. $X = 2$	$X = 2 \Rightarrow x + 1 = 2$ $\Rightarrow x = 1$
செவ்வகலம்	$X = -a$ i.e. $X = -2$	$X = -2 \Rightarrow x + 1 = -2$ $\Rightarrow x = -3$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a = 8$	8



படம் 4. 38

(iv) $$y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$$

$$y^2 + 6y = +8x - 9$$

$$(y+3)^2 - 9 = +8x - 9$$

$$(y+3)^2 = 8x$$

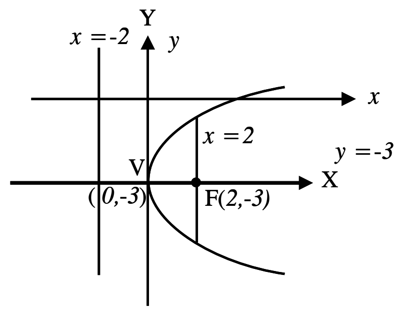
$$Y^2 = 8X$$ இங்கு $X = x,\ Y = y + 3$

$$Y^2 = 4(2)X$$

$$\therefore\ a = 2$$

வலதுபுறம் திறப்புடைய வடிவில் அமைகிறது.

	X, Yஐ பொறுத்து	x, yஐ பொறுத்து $X = x$, $Y = y + 3$
அச்சு	$Y = 0$	$Y = 0 \Rightarrow y + 3 = 0$
முனை	$(0, 0)$	$X = 0$; $Y = 0$ $\Rightarrow x = 0$; $y + 3 = 0$ $\therefore V(0, -3)$
குவியம்	$(a, 0)$ i.e. $(2, 0)$	$X = +2$; $Y = 0$ $\Rightarrow x = 2, y + 3 = 0$ $F(2, -3)$
இயக்குவரை	$X = -a$ அதாவது, $X = -2$	$X = -2 \Rightarrow x = -2$
செவ்வகலம்	$X = a$ அதாவது, $X = 2$	$X = 2 \Rightarrow x = 2$
செவ்வகத்தின் நீளம்	$4a = 8$	8



படம் 4.39

(v) $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$

$$x^2 - 2x = -8y - 17$$

$$(x-1)^2 - 1 = -8y - 17$$

$$(x-1)^2 = -8y - 16$$

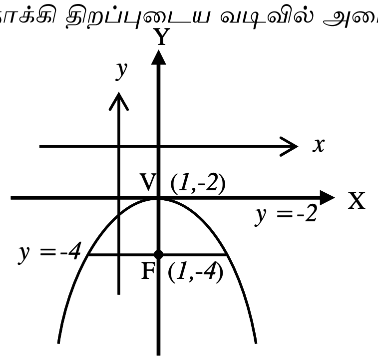
$$(x-1)^2 = -8(y+2)$$

$X^2 = -8Y$ இங்கு $X = x - 1$, $Y = y + 2$

$$X^2 = -4(2)Y$$

$$a = 2$$

∴ பரவளையம் கீழ்நோக்கி திறப்புடைய வடிவில் அமைகிறது.



படம் 4.40

	X, Yஐ பொறுத்து	x, yஐ பொறுத்து $X = x - 1$, $Y = y + 2$
அச்சு	$X = 0$	$X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ $\Rightarrow x = 1$
முனை	(0, 0)	$X = 0$; $Y = 0$ $\Rightarrow x - 1 = 0,\ y + 2 = 0$ $\therefore V(1, -2)$

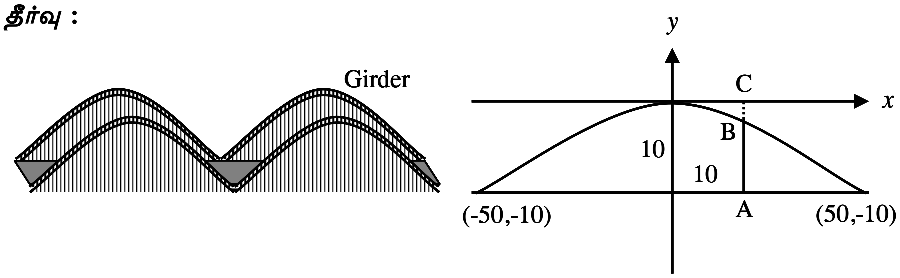
குவியம்	$(0, -a)$ i.e. $(0, -2)$	$X = 0$; $Y = -2$ $\Rightarrow x - 1 = 0, y + 2 = -2$ $F(1, -4)$
இயக்குவரை	$Y = a$ அதாவது, $Y = 2$	$Y = 2 \Rightarrow y + 2 = 2$ $\Rightarrow y = 0$
செவ்வகலம்	$Y = -a$ அதாவது, $Y = -2$	$Y = -2 \Rightarrow y + 2 = -2$ $y = -4$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a = 8$	8

4.3.7 சில நடைமுறைக் கணக்குகள் (Some practical problems) :

எடுத்துக்காட்டு 4.8 :

ஒரு ரயில்வே பாலத்தின் மேல் வளைவு பரவளையத்தின் அமைப்பைக் கொண்டுள்ளது. அந்த வளைவின் அகலம் 100 அடியாகவும் அவ்வளைவின் உச்சிப்புள்ளியின் உயரம் பாலத்திலிருந்து 10 அடியாகவும் உள்ளது எனில், பாலத்தின் மத்தியிலிருந்து இடப்புறம் அல்லது வலப்புறம் 10 அடி தூரத்தில் பாலத்தின் மேல் வளைவு எவ்வளவு உயரத்தில் இருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 4.41

இங்கு பரவளையம் கீழ்நோக்கித் திறப்புடையதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $x^2 = -4ay$

இது $(50, -10)$ வழியாகச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad 50 \times 50 = -4a(-10)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{250}{4}$$

$$\therefore \quad x^2 = -4\left(\frac{250}{4}\right)y$$

$$x^2 = -250y$$

பரவளையத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி $B(10, y_1)$ என்க.

$$\therefore \; 100 = -250y_1$$

$$y_1 = -\frac{100}{250} = -\frac{2}{5}$$

AB என்பது பாலத்தின் மையத்திலிருந்து வலப்புறத்தில் 10 அடி தொலைவில், பாலத்தின் உயரமாகும்.

$AC = 10$ மற்றும் $BC = \frac{2}{5}$

$AB = 10 - \frac{2}{5} = 9\frac{3}{5}$ ft

அதாவது, தேவைப்பட்ட இடத்திலிருந்து பாலத்தின் மிக உயரம் $9\frac{3}{5}$ அடி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.9 :

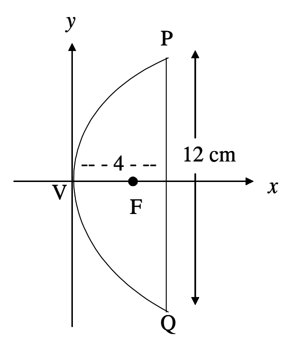
ஒரு இருச்சக்கர வாகனத்தின் முகப்பு விளக்கில் உள்ள பிரதிபலிப்பான் ஒரு பரவளைய அமைப்பில் உள்ளது. அதன் விட்டம் 12 செ.மீ, ஆழம் 4 செ.மீ எனில் அதன் அச்சில் எவ்விடத்தில் பல்பினை (bulb) பொருத்தினால் முகப்பு விளக்கு மிகச் சிறந்த முறையில் ஒளியைத் தரமுடியும் எனக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

பரவளைய பிரதிபலிப்பான் பண்பின்படி குமிழ் விளக்கு குவியத்தில் அமைந்திருக்க வேண்டும். முனையை ஆதியாக எடுத்துக் கொண்டால் அதன் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$

PQ என்பது பிரதிபலிப்பானின் விட்டம் என்க. $\therefore$ *P* என்பது (4, 6) ஆகும்.

மேலும் *P* (4, 6) பரவளையத்தின் மீது அமைவதால், $36 = 4a \times 4 \Rightarrow a = 2.25$



படம் 4.42

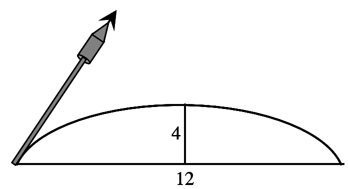
எனவே குவியம் முனையிலிருந்து x-அச்சில் 2.25 செ.மீ தொலைவில் அமையும்.

∴ குமிழ் விளக்கை மையத்திலிருந்து 2.25 செ,மீ தொலைவில் பொருத்த வேண்டும்.

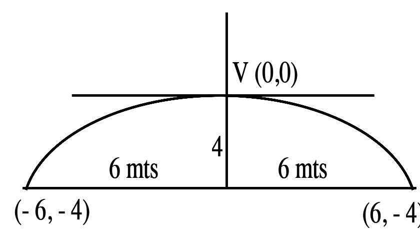
எடுத்துக்காட்டு 4.10 :

ஒரு ராக்கெட் வெடியானது கொளுத்தும்போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன் உச்ச உயரம் 4 மீ-ஐ எட்டும்போது அது கொளுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து கிடைமட்ட தூரம் 6 மீ தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக 12 மீ தொலைவில் தரையை வந்தடைகிறது எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தப்படும் எறிகோணம் காண்க.

தீர்வு :



படம் 4.43



படம் 4.44

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ என்ற அமைப்பை உடையது (முனையை ஆதியாகக் கொள்க). இது $(6, -4)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore\ 36 = 16a \ \Rightarrow\ a = \frac{9}{4}$$

$$\text{சமன்பாடு}\quad x^2 = -9y \qquad \ldots(1)$$

இப்பொழுது $(-6, -4)$ என்ற புள்ளியில் சாய்வைக் கணக்கிட வேண்டும்.

(1)-ஐ x-ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்போம்.

$$2x = -9\frac{dy}{dx} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}x$$

$$\frac{dy}{dx}\ (-6, -4)\text{இல்} = -\frac{2}{9} \times -6 = \frac{4}{3} \quad \text{அதாவது,}\ \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

∴ தேவையான எறிகோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 4.11 :

ஒரு எதிரொலிப்பான் தொலைநோக்கியில் பரவளைய ஆடி உள்ளது. அதன் முனையிலிருந்து குவியத்திற்கு இடைப்பட்ட தூரம் 9 மீ. அந்த ஆடியின் மேற்புற விட்டம் 160 செ.மீ எனில் மையத்தில் அந்த ஆடியின் குழிவு காண்க.

தீர்வு :

முனை ஆதியில் அமையும் என்க.

$$VF = a = 900$$

பரவையத்தின் சமன்பாடு

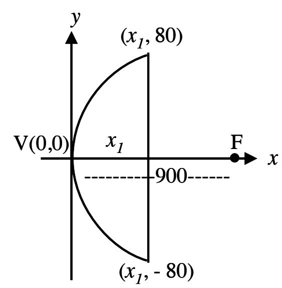
$$y^2 = 4 \times 900 \times x$$

ஆடியின் மையத்திலுள்ள குழிவை x_1 என்க.

$(x_1, 80)$ பரவளையத்தின் மீது இருப்பதால்

$$80^2 = 4 \times 900 \times x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{16}{9}$$

$\therefore$ எனவே ஆடியின் குழிவு $= \frac{16}{9}$ செ.மீ

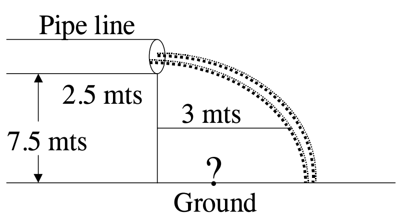


படம் 4.45

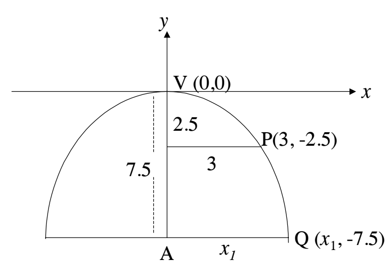
எடுத்துக்காட்டு 4.12 :

தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்த பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5 மீ கீழே நீரின் பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக்கோட்டிற்கு 3 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்பதைக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 4.46



படம் 4.47

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி பரவளையம் கீழ்நோக்கி திறப்புடையதாக அமைகிறது. அதாவது $x^2 = -4ay$.

P என்ற புள்ளி பரவளையப் பாதையில் குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5மீ கீழேயும், குழாயின் முனை வழியே செல்லும் நிலை குத்துக்கோட்டிற்கு 3 மீ அப்பாலும் உள்ளது.

$\therefore$ P என்பது $(3, -2.5)$

$$\text{எனவே} \quad 9 = -4a(-2.5)$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{10}$$

$\therefore$ பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4 \times \frac{9}{10} y$

குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளியிலிருந்து x_1 தூரத்துக்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழுவதாகக் கொள்க. ஆனால் குழாயானது தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5 மீ உயரத்தில் அமைந்துள்ளது.

$(x_1, -7.5)$ என்ற புள்ளி பரவளையத்திலுள்ளது.

$$x_1^2 = -4 \times \frac{9}{10} \times (-7.5) = 27$$

$$x_1 = 3\sqrt{3}$$

$\therefore$ எனவே தண்ணீர் தரையைத் தொடும் இடத்துக்கும் குழாயின் முனையிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $3\sqrt{3}$ மீ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.13 :

ஒரு வால் விண்மீன் (comet) ஆனது சூரியனைச் (sun) சுற்றி பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. மற்றும் சூரியன் பரவளையத்தின் குவியத்தில் அமைகிறது. வால் விண்மீன் சூரியனிலிருந்து 80 மில்லியன் கி.மீ. தொலைவில் அமைந்து இருக்கும் போது வால் விண்மீனையும் சூரியனையும் இணைக்கும் கோடு பாதையின் அச்சுடன் $\frac{\pi}{3}$ கோணத்தினை ஏற்படுத்துமானால் (i) வால் விண்மீனின் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க (ii) வால் விண்மீன் சூரியனுக்கு எவ்வளவு அருகில் வரமுடியும் என்பதையும் காண்க. (பாதை வலதுபுறம் திறப்புடையதாக கொள்க).

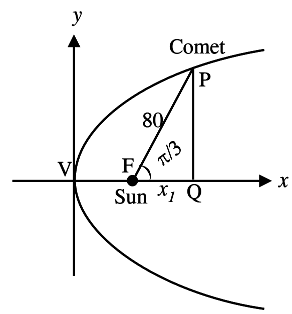
தீர்வு :

பரவளையத்தின் பாதை வலதுபக்கம் திறப்புடையது. மேலும் முனைப்புள்ளி ஆதியிலுள்ளது.

வால்விண்மீனின் நிலை P *எனக்* $FP = 80$ *மில்லியன் கி.மீ. ஆகும்.*

P*-யிலிருந்து பரவளையத்தின் அச்சுக்கு* PQ *என்ற செங்குத்து வரைக.*

$FQ = x_1$ *என்க*



படம் 4.48

முக்கோணம் FQP *யிலிருந்து*

$$PQ = FP \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$$

$$FQ = x_1 = FP \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 80 \times \frac{1}{2} = 40$$

$\therefore VQ = a + 40$ ($VF = a$ *என்பதால்*)

P *என்பது*$(VQ, PQ) = \left(a + 40, 40\sqrt{3}\right)$

P *என்பது பரவளையம்* $y^2 = 4ax$ *மேல் இருப்பதால்*

$$\left(40\sqrt{3}\right)^2 = 4a(a + 40)$$

$$\Rightarrow a = -60 \text{ or } 20$$

$a = -60$ *ஏற்புடையதல்ல.*

$\therefore$ *பாதையின் சமன்பாடு* $y^2 = 4 \times 20 \times x$

$$y^2 = 80x$$

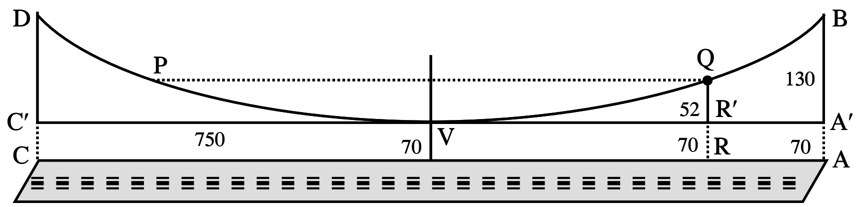
சூரியனுக்கும் வால் விண்மீனுக்கும் இடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தூரம் VF *அதாவது,* a

$\therefore$ *மிகக் குறைந்த தூரம்* 20 *மில்லியன் கி.மீ. ஆகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 4.14 :

ஒரு தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம் பரவளைய வடிவிலுள்ளது. அதன் பாரம் கிடைமட்டமாக சீராக பரவியுள்ளது. அதைத் தாங்கும் இரு தூண்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 1500 *அடி. கம்பி வடத்தைத் தாங்கும் புள்ளிகள் தூணில் தரையிலிருந்து* 200 *அடி உயரத்தில் அமைந்துள்ளன. மேலும் தரையிலிருந்து கம்பி வடத்தின் தாழ்வான புள்ளியின் உயரம்* 70 *அடி, கம்பிவடம்* 122 *அடி உயரத்தில் தாங்கும் கம்பத்திற்கு இடையே உள்ள செங்குத்து நீளம் (தரைக்கு இணையாக) காண்க.*

தீர்வு :



படம் 4.49

கம்பி வடத்தின் மீது மிகத் தாழ்வான புள்ளி முனையாகும். இதனை ஆதியாகக் கொள்க. AB மற்றும் CD தாங்கும் தூண்கள் ஆகும். இரு தூண்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு 1500 அடி என்பதால்

$$VA' = 750 \text{ அடி } ; \; AB = 200 \text{ அடி}$$

$$\therefore A'B = 200 - 70 = 130 \text{ அடி}$$

எனவே B என்பது (750, 130)

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = 4ay$

B என்ற புள்ளி $x^2 = 4ay$-இல் உள்ளதால்

$$(750)^2 = 4a(130)$$

$$\Rightarrow \; 4a = \frac{75 \times 750}{13}$$

$\therefore \; x^2 = \dfrac{75 \times 750}{13} y$ என்பது சமன்பாடாகும்.

கம்பம் RQ -விலிருந்து கம்பி வடத்திற்குச் செங்குத்தான நீளம் PQ என்க.

$RQ = 122, \;\; RR' = 70 \;\; \Rightarrow \;\; R'Q = 52$

$VR' = x_1$ என்க. $\therefore$ Q என்பது $(x_1, 52)$

Q பரவளையத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி

$$x_1^{\,2} = \frac{75 \times 750}{13} \times 52$$

$$x_1 = 150\sqrt{10}$$

$$PQ = 2x_1 = 300\sqrt{10} \text{ அடி}$$

பயிற்சி 4.1

(1) *பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.*

(i)	*குவியம்* : $(2, -3)$;	*இயக்குவரை* : $2y - 3 = 0$
(ii)	*குவியம்* : $(-1, 3)$;	*இயக்குவரை* : $2x + 3y = 3$
(iii)	*முனை* : $(0, 0)$;	*குவியம்* : $(0, -4)$
(iv)	*முனை* : $(1, 4)$;	*குவியம்* : $(-2, 4)$
(v)	*முனை* : $(1, 2)$;	*செவ்வகலம்* : $y = 5$
(vi)	*முனை* : $(1, 4)$;	*இடதுபுறம் திறப்புடையது மற்றும்* $(-2, 10)$ *என்ற புள்ளி வழியேச் செல்வதும்*
(vii)	*முனை* : $(3, -2)$;	*கீழ்நோக்கி திறப்புடையது மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம்* 8.
(viii)	*முனை* : $(3, -1)$;	*வலதுபுறம் திறப்புடையது, செவ்வகலத்திற்கும் இயக்குவரைக்கும் இடைப்பட்ட தூரம்* 4.
(ix)	*முனை* : $(2, 3)$;	*மேல்நோக்கி திறப்புடையது மற்றும்* $(6, 4)$ *வழியேச் செல்லக்கூடியது.*

(2) *பின்வரும் பரவளையங்களுக்கு அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அவற்றின் வரைபடங்களை வரைக.*

(i) $y^2 = -8x$ (ii) $x^2 = 20y$

(iii) $(x - 4)^2 = 4(y + 2)$ (iv) $y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$

(v) $x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$

(3) *ஒரு பரவளைய பிரதிபலிப்பானின் விட்டம்* 20*செ.மீ அதன் குழிவு* 5 *செ.மீ எனில் அப்பிரதிபலிப்பானின் மையத்திலிருந்து குவியத்திற்கு இடைப்பட்ட தூரம் காண்க.*

(4) *பரவளைய ஆடியின் குவியம் அதன் மையத்திலிருந்து (முனை)* 8 *செ.மீ தொலைவில் உள்ளது. ஆடியின் குழிவு* 25 *செ.மீ எனில் அவ்வாடியின் விட்டம் காண்க.*

(5) *ஒரு தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம் பரவளைய வடிவிலுள்ளது. அதன் நீளம்* 40 *மீட்டர் ஆகும். வழிப்பாதையானது. கம்பி வடத்தின் கிழ்மட்டப் புள்ளியிலிருந்து* 5 *மீட்டர் கீழே உள்ளது. கம்பி வடத்தைத் தாங்கும் தூண்களின் உயரங்கள்* 55 *மீட்டர் எனில்,* 30 *மீட்டர் உயரத்தில் கம்பி வடத்திற்கு ஒரு துணை தாங்கி கூடுதலாகக் கொடுக்கப்பட்டால் அத்துணைத்தாங்கியின் நீளத்தைக் காண்க.*

4.4 நீள்வட்டம் (Ellipse)

வரையறை : *தளத்தில், ஒரு நிலைப்புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம் அத்தளத்தில் உள்ள நிலைக்கோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்துடன் மாறிலி விகிதத்தை ஏற்படுத்தி அவ்விகித மதிப்பு ஒன்றுக்கு குறைவாக இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை நீள்வட்டமாகும்.*

குறிப்பு : பாடத்திட்டத்தின்படி சமன்பாட்டின் வரைமுறை* (4.4.1, 4.4.2) *மற்றும் நீள்வட்டத்தினை வரையும் முறை தேவையில்லை. சமன்பாட்டின் அமைப்பு மற்றும் அதன் வளைவரையின் அமைப்பு மட்டுமே தேவை. இருப்பினும், கற்றல் திறனை அதிகரிக்கும் நோக்குடன் சமன்பாட்டின் வரைமுறையும் வளைவரையின் போக்கும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

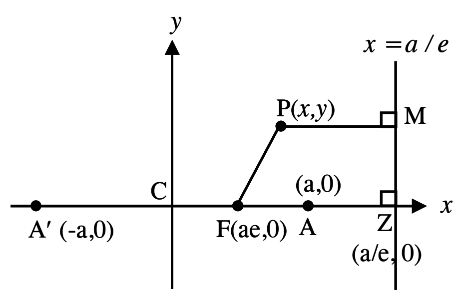
4.4.1 நீள்வட்டச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவம்
(Standard equation of the ellipse) :

கொடுக்கப்பட்டவை

- ★ *நிலைப்புள்ளி* F
- ★ *நிலைக்கோடு* l
- ★ *மையத் தொலைத் தகவு* e $(e < 1)$
- ★ *நகரும் புள்ளி* $P\,(x, y)$

வரையறை **:**

- ★ *நிலைப்புள்ளி* F*ஐக் குறிக்கவும். மேலும் நிலைக்கோடு* l*ஐ வரையவும்.*



படம் 4.50

- ★ F*இலிருந்து* l*க்கு* FZ*என்ற குத்துக்கோட்டை வரைக.*
- ★ P*இலிருந்து* l*க்கு* PM *என்ற குத்துக்கோட்டை வரைக.*
- ★ FZ*ஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும்* $e : 1$ *என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் முறையே* A, A' *என்க.*
- ★ $AA' = 2a$ *என்க. இதை* x*-அச்சு எனக் கொள்க.*
- ★ AA'*இன் மையக்குத்துக்கோட்டை வரைக. அதை* y*-அச்சு எனக் கொள்க.*
- ★ AA'*இன் மையப்புள்ளியை* C*என்க.* C*யை ஆதியாகக் கொள்வோம்.* C, A *மற்றும்* A'*இன் புள்ளிகள் முறையே* $(0, 0), (a, 0), (-\,a, 0)$

F மற்றும் M-இன் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காணல் :

FZ*ஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும்* $e : 1$ *என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள்* A, A' *ஆதலால்*

$$\frac{FA}{AZ} = \frac{e}{1}$$

$$\therefore FA = e\, AZ$$

i.e., $CA - CF = e\,(CZ - CA)$

$$\therefore a - CF = e\,(CZ - a) \quad \ldots(1)$$

$$\frac{FA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

$$\therefore FA' = e\, A'Z$$

i.e. $A'C + CF = e\,(A'C + CZ)$

$$\therefore a + CF = e(a + CZ) \quad \ldots (2)$$

$$(2) + (1) \quad \Rightarrow \quad 2a = e\,[2CZ] \quad \Rightarrow \; CZ = \frac{a}{e}$$

$$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad 2CF = e(2a) \quad \Rightarrow \quad CF = ae$$

$\therefore M$ என்பது $\left(\frac{a}{e},\ y\right)$, F என்பது $(ae, 0)$

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காணுதல் :

P என்ற புள்ளி நீள்வட்டத்தின் மேல் அமைவதால்

$$\frac{FP}{PM} = e \;\Rightarrow\; FP^2 = e^2 PM^2$$

$$\text{i.e. } (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2 \left[\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + (y - y)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - e^2x^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$(1 - e^2)\, x^2 + y^2 = a^2\,(1 - e^2)$$

$a^2\,(1 - e^2)$ ல் வகுக்க

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

அதாவது, $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \because b^2 = a^2\,(1 - e^2)$$

இதுவே நீள்வட்டத்தின் திட்டச் சமன்பாடு ஆகும்.

4.4.2 நீள்வட்டத்தை வரைதல் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$

(i) *சமச்சீர் பண்பு* :

வளைவரை x, y அச்சுக்களைப் பொறுத்து சமச்சீர் ஆக உள்ளதால் ஆதியைப் பொறுத்தும் சமச்சீராக இருக்கும்.

(ii) *சிறப்புப் புள்ளிகள்* :

நீள்வட்டம் ஆதி வழியேச் செல்லாது.

$y = 0$ எனில் x-அச்சின் மேலுள்ள புள்ளிகள் $x = \pm a$. $\therefore$ வளைவரை x-அச்சை $A(a, 0), A'(-a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

$x = 0$ எனில் $y = \pm b$ $\therefore$ வளைவரை y-அச்சை $B(0, b), B'(0, -b)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

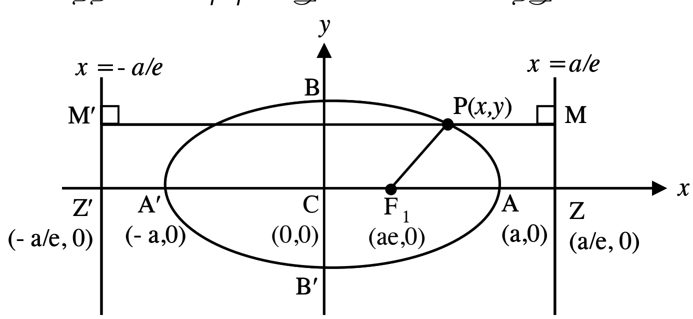
(iii) வளைவரையின் இருப்பு :

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ என எழுதலாம். $a^2 - x^2 \geq 0$ எனில், y ஒரு மெய்யெண் ஆகும். அதாவது $a^2 - x^2 < 0$ அல்லது $x^2 - a^2 > 0$ எனில், அப்பகுதியில் வளைவரை அமையாது. இவ்வாறாக $-a \leq x \leq a$ என்ற பகுதியில் மட்டுமே வளைவரை அமையும்.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ என எழுதுவோம்.

$b^2 - y^2 \geq 0$ என்றால் மட்டுமே x ஒரு மெய்யெண் ஆகும். வளைவரை $b^2 - y^2 < 0$ என்ற பகுதியில் அமையாது. அதாவது $y > b$ மற்றும் $y < b$ என்ற பகுதியில் வளைவரை அமையாது. வளைவரையானது $-b \leq y \leq b$ என்ற பகுதியில் மட்டுமே அமையும்.

$\therefore$ $x = \pm a$, $y = \pm b$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையே மூடிய வளைவரையாக நீள்வட்டம் அமைகிறது. இவ்வாறாக நீள்வட்டத்தின் வரைபடம் படத்தில் காட்டியுள்ளதுபோல் கிடைக்கிறது.



படம் 4.51

4.4.3 நீள்வட்டத்தின் முக்கிய வரையறைகள் :

குவியம் : நிலைப்புள்ளியானது நீள்வட்டத்தின் குவியம் ஆகும். அப்புள்ளியை $F_1\ (ae, 0)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

இயக்குவரை : நிலைக்கோடு, அதிபரவளையத்தின் இயக்குவரையாகும். இதன் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$ ஆகும்.

நெட்டச்சு : கோட்டுத்துண்டு AA' என்பது நெட்டச்சு. அதன் நீளம் $2a$ ஆகும். நெட்டச்சின் சமன்பாடு $y = 0$.

குற்றச்சு : கோட்டுத்துண்டு BB' என்பது குற்றச்சு. அதன் நீளம் $2b$. குற்றச்சின் சமன்பாடு $x = 0$.

மையம் : நெட்டச்சும், குற்றச்சும் வெட்டும் புள்ளி நீள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும். இங்கு $C(0, 0)$ ஆனது நீள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

செவ்வகலத்தின் இறுதிப்புள்ளிகளும் அதன் நீளமும் காணுதல்:

இறுதிப்புள்ளிகளைக் காண $x = ae$ … (1) மற்றும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ … (2) –ஐ தீர்க்க வேண்டும். சமன்பாடு (1)ஐ (2)-இல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$\frac{a^2 e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{y^2}{b^2} = 1 - e^2$$

$$\therefore y^2 = b^2 (1 - e^2)$$

$$= b^2 \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \because b^2 = a^2 (1 - e^2) \\ \text{அல்லது } \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \end{array} \right.$$

$$\therefore y = \pm \frac{b^2}{a}$$

L_1 மற்றும் L_1' செவ்வகலத்தின் இறுதிப்புள்ளிகள் எனில் L_1 என்பது $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$, L_1' என்பது $\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ ஆகும்.

இதே போல் மற்றொரு செவ்வகலத்தின் இறுதிப்புள்ளிகள் $\left(-ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$ ஆகும்.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a}$.

மேற்கூறிய நீள்வட்டத்திற்கு நெட்டச்சு x-அச்சின் வழியில் உள்ளது. திட்ட நீள்வட்டத்தை இதேபோன்று மற்றொரு திட்டநீள் வட்டத்தினை அதன் நெட்டச்சு y-அச்சின் வழியில் அமையுமாறு காணலாம்.

முனைப்புள்ளிகள் : நீள்வட்டம், நெட்டச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகளாகும். இங்கு நீள்வட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் $A(a, 0)$ மற்றும் $A'(-a, 0)$ ஆகும்.

குவிதூரம் : ஏதேனும் ஒரு குவியத்தில் இருந்து நீள்வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளி Pக்கு உள்ள தூரம் குவிதூரம் ஆகும்.

குவிநாண் : நீள்வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒருநாண் அதன் ஏதேனும் ஒரு குவியம் வழிச் சென்றால் அந்நாண் குவி நாண் எனப்படும்.

ஒரு சிறப்பு பண்பு : நீள்வட்டம் ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் நீள்வட்டத்தில்

(i) இரண்டாவது குவியம் $F_2\,(-ae, 0)$

(ii) இரண்டாவது இயக்குவரை $x = -\dfrac{a}{e}$

செவ்வகலம் : ஒரு குவி நாண் நெட்டச்சுக்குச் செங்குத்து எனில் அந்நாண் செவ்வகலம் ஆகும். செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள் $x = ae$ மற்றும் $x = -ae$.

மையத்தொலைத்தகவு : $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$

மேற்குறிப்பு :

நீள்வட்டத்தில் $0 < e < 1$, $e \to 0$ எனில் $\dfrac{b}{a} \to 1$ அதாவது, $b \to a$ அல்லது குற்றச்சும் நெட்டச்சும் கிட்டத்தட்ட சம நீளங்களை அடையும். அதாவது நீள்வட்டம் கிட்டத்தட்ட வட்டம் போன்ற அமைப்பை அடையும். e ஆனது 1-ஐ நெருங்கும் போது $\dfrac{b}{a}$ பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே நீள்வட்டமானது ஒரு கோட்டுத் துண்டு அமைப்பை அடையும். அதாவது நீள்வட்டமானது மிகவும் தட்டையான வடிவத்தை அடையும்.

4.4.4 நீள்வட்டத்தின் மற்றொரு வடிவம் :

நெட்டச்சானது y-அச்சு வழியானது எனில் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1,\ a > b.$ ஆகும்.

முந்தைய நீள்வட்டத்திற்கு விவரித்தது போலவே இந்நீள்வட்டத்திற்கும் பின்வருவனவற்றை அடைகிறோம்.

மையம் : $C\,(0, 0)$

முனைகள் : $A\,(0, a)$, $A'\,(0, -a)$

குவியங்கள் : $F_1\,(0, ae)$, $F_2\,(0, -ae)$

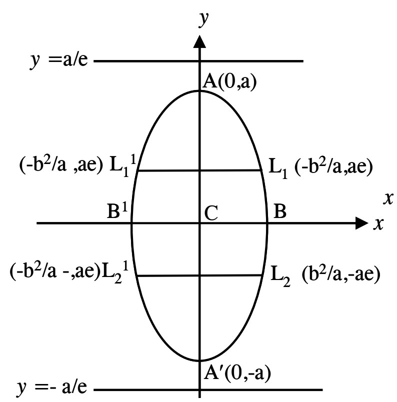
நெட்டச்சின் சமன்பாடு : $x = 0$

குற்றச்சின் சமன்பாடு : $y = 0$

குற்றச்சின் முனைகள் : $B\ (b, 0),\ B'(-\ b, 0)$

இயக்குவரைகளின் சமன்பாடுகள் : $y = \pm\ a/e$

செவ்வகலத்தின் முனைகள் : $\left(\pm \dfrac{b^2}{a},\ ae\right)$, $\left(\pm \dfrac{b^2}{a},\ -ae\right)$



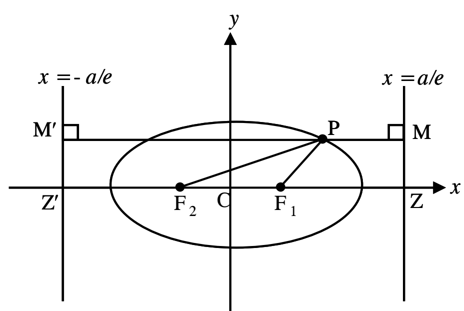
படம் 4.52

4.4.5 நீள்வட்டத்தின் பொது வடிவங்கள் (General forms of standard ellipses) :

மையம் $C(h,\ k)$ எனில் நீள்வட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் காண xக்குப் பதில் $x - h$, y க்குப் பதில் $(y - k)$ என திட்டச் சமன்பாட்டில் பிரதியிடக் கிடைப்பது $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1,\ a > b$

***நீள்வட்டத்தின் குவிப் பண்பு* (Focal property of an ellipse) :**

நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித்தொலைவுகளின் கூடுதல் அதன் நெட்டச்சின் நீளத்திற்குச் சமம்.



படம் 4.53

நிரூபணம் :

நிறுவ வேண்டியது $F_1P + F_2P = 2a$

P என்பது நீள்வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி என்க. $x = \frac{a}{e}$ மற்றும் $x = -\frac{a}{e}$ என்ற இயக்குவரைகளுக்கு PM, PM' என்ற செங்குத்துக்கோடுகள் வரைக.

$\frac{F_1P}{PM} = e$, $\frac{F_2P}{PM'} = e$ என அறிவோம்.

$$\therefore F_1P = ePM, \quad F_2P = e\,PM'$$

$$\begin{aligned}\therefore F_1P + F_2P &= e(PM + PM')\\ &= e(MM')\\ &= e \cdot \frac{2a}{e}\\ &= 2a\\ &= \text{நெட்டச்சின் நீளம்}\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.15 : ஒரு நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் $(1, 0)$, $(-1, 0)$ மற்றும் மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : குவியங்கள் F_1 $(1, 0)$, F_2 $(-1, 0)$ எனில் F_1F_2இன் நடுப்புள்ளி நீள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

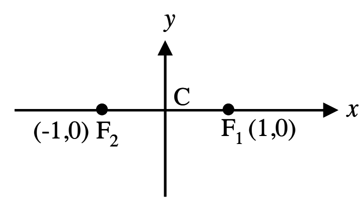
$\therefore$ மையம் C என்பது $\left(\frac{1-1}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$

ஆனால் $F_1F_2 = 2ae = 2$

மற்றும் $e = \frac{1}{2}$

$$2a \times \frac{1}{2} = 2$$

$$a = 2$$



படம் 4.54

$$b^2 = a^2(1 - e^2) = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3$$

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு x-அச்சுவழிச் செல்கின்றது என்பது தெளிவாகிறது.

$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 4.16 : ஒரு நீள்வட்டத்தின் ஒரு குவியம் (2, 0) அதன் ஒத்த இயக்குவரை $x = 8$ மற்றும் மையத் தொலைத் தகவு 1/2 எனில் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : $P(x, y)$ ஒரு நகரும் புள்ளி என்க. வரையறைப்படி

$$\frac{FP}{PM} = e$$

$$\therefore \quad FP^2 = e^2 \, PM^2$$

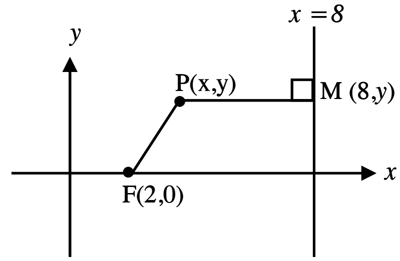
$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{4}\left(\pm\frac{x-8}{\sqrt{1}}\right)^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-8)^2$$

$$4\,[(x-2)^2 + y^2] = (x-8)^2$$

$$3x^2 + 4y^2 = 48$$

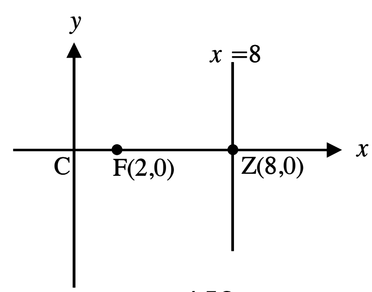
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$



படம் 4.55

மாற்று முறைப்படி :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு x-அச்சுவழிச் செல்கிறது.



படம் 4.56

∴ நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$FZ = \frac{a}{e} - ae = 6$$

ஆனால் $e = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a - \frac{1}{2}\,a = 6$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}a = 6 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) = 16\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 16 \times \frac{3}{4} = 12$$

∴ தேவையான சமன்பாடு $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.17 : *நீள்வட்டத்தின் ஒரு குவியம் (− 1, − 3) இயக்குவரை $x - 2y = 0$ மற்றும் மையத்தொலைத் தகவு $\frac{4}{5}$ எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

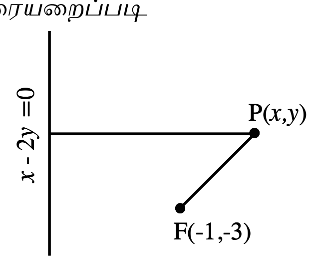
தீர்வு : $P(x, y)$ என்பது நகரும் புள்ளி என்க. வரையறைப்படி

$$\frac{FP}{PM} = e$$

$$\therefore \quad FP^2 = e^2 \, PM^2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = \frac{16}{25} \left[\pm \frac{x - 2y}{\sqrt{1 + 4}} \right]^2$$

$$125 \, [(x + 1)^2 + (y + 3)^2 \,] = 16 \, (x - 2y)^2$$



படம் 4.57

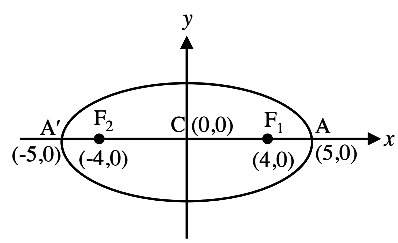
$$\Rightarrow 109x^2 + 64xy + 61y^2 + 250x + 750y + 1250 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4.18: *நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் (±4, 0) மற்றும் முனைகள் (± 5, 0) எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

தீர்வு :

குவியங்களை $F_1(4, 0)$, $F_2(-4,0)$ மற்றும் முனைகளை $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$ என்க. AA'இன் நடுப்புள்ளியானது நீள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும். i.e., Cஆனது

$$\left(\frac{-5 + 5}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (0, 0)$$



படம் 4.58

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு *x*-அச்சு வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

$$\text{இங்கு } CA = a = 5 \qquad CF = ae = 4 \quad \because \; e = \frac{4}{5}$$

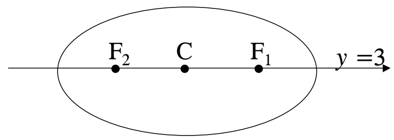
$$b^2 = a^2 \, (1 - e^2) = 25 - 16 = 9$$

$\therefore$ தேவையான நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.19 : *நீள்வட்டத்தின் மையம்* (2, 3). *ஒரு குவியம்* (3, 3) *எனில் அதன் மற்றொரு குவியத்தைக் காண்க.*

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி நெட்டச்சு x அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. F_1 (3, 3) *என்க.*



படம் 4.59

$F_2\,(x, y)$ *என்க.*

நெட்டச்சு $y = 3$*இல்* $F_1\ F_2$*இன் நடுப்புள்ளி* C (2, 3) *என்பதால்,*

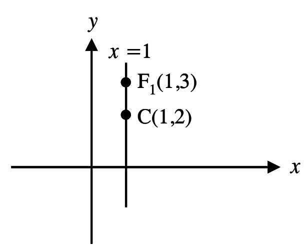
$$\frac{x+3}{2} = 2 \text{ மற்றும் } \frac{y+3}{2} = 3$$

$\therefore\ x = 1, y = 3.\ \therefore$ *மற்றொரு குவியம்* (1, 3).

எடுத்துக்காட்டு 4.20 : *ஒரு நீள்வட்டத்தின் மையம்* (1, 2), *ஒரு குவியம்* (1, 3) *மற்றும் மையத் தொலைத் தகவு* $\frac{1}{2}$ *எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

தீர்வு :

நெட்டச்சு y-*அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதால் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு.*



படம் 4.60

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$CF_1 = ae = 1$$

ஆனால் $e = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2,\ a^2 = 4$

$$b^2 = a^2(1-e^2) = 4\left(1-\frac{1}{4}\right) = 3\ ;\quad C(h, k) = (1, 2)$$

$\therefore$ *தேவையான சமன்பாடு* $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.21 : *மையம் ஆதி,* x-*அச்சு, நெட்டச்சு, மையத் தொலைத்தகவு* 1/2 *உடையதும்* (2, 1) *என்ற புள்ளிவழிச் செல்லும் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

தீர்வு : *மையம், ஆதி,* x-*அச்சு நெட்டச்சு உடைய நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

இது (2, 1)வழிச் செல்வதால் $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ … (1)

$$e = \frac{1}{2}$$

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \Rightarrow b^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore \; 4b^2 = 3a^2 \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1)-ம் (2)-ம் தீர்க்கக் கிடைப்பது $a^2 = \frac{16}{3}$, $b^2 = 4$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $\frac{x^2}{16/3} + \frac{y^2}{4} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.22 : *நெட்டச்சு y அச்சுக்கு இணையாகவும் அரை-நெட்டச்சின் நீளம் 12, செவ்வகலத்தின் நீளம் 6. மையம் (1, 12) உடையதுமான நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

தீர்வு : நெட்டச்சு y-அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதால் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

மையம் $(h, k) = (1, 12)$

அரை நெட்டச்சு $a = 12 \Rightarrow a^2 = 144$

செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a} = 6 \Rightarrow \frac{2b^2}{12} = 6$

$\therefore$ $b^2 = 36$ $\therefore$தேவையான சமன்பாடு $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{144} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.23 : *மையம் (4, – 1) மற்றும் ஒரு குவியம் (1, – 1) உடையதும், (8, 0) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

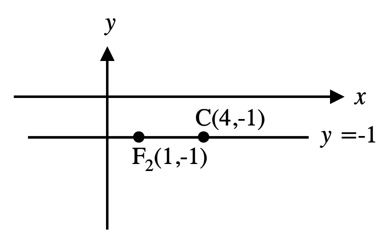
தீர்வு :

நெட்டச்சு x அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதால் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

மையம் (h, k) என்பது $(4, -1)$

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$



படம் 4.61

இது (8, 0) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால் $\therefore \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ … (1)

ஆனால் $CF_1 = ae = 3$

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) = a^2 - a^2 e^2 = a^2 - 9$$

(1) $\Rightarrow$ $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{a^2 - 9} = 1$

$\Rightarrow$ $16a^2 - 144 + a^2 = a^4 - 9a^2$

$\Rightarrow$ $a^4 - 26a^2 + 144 = 0$

$\Rightarrow$ $a^2 = 18$ அல்லது 8

நிலை (i) : $a^2 = 18$

$b^2 = a^2 - 9 = 18 - 9 = 9$

நிலை (ii) : $a^2 = 8$

$b^2 = 8 - 9 = -1$ என்பது பொருந்தாது.

$\therefore$ $a^2 = 18, \quad b^2 = 9$

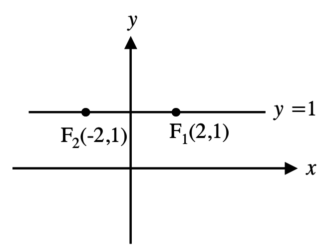
$\therefore$தேவையான சமன்பாடு $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.24 : ஒரு நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் (2, 1), (–2, 1) மற்றும் செவ்வகலரத்தின் நீலம் 6 எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள விவரங்களின்படி நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு *x* அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதால் அதன் சமன்பாடு

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ என்ற வடிவில் அமையும்.



படம் 4.62

நீள்வட்டத்தின் மையம் F_1F_2இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

$\therefore$ மையம் $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (0, 1)$

$\therefore$ எனவே நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

$$F_1 F_2 = 2ae = 4 \Rightarrow a^2 e^2 = 4$$

$$a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 \qquad \ldots (1)$$

செவ்வகத்தின் நீளம் $\dfrac{2b^2}{a} = 6 \quad b^2 = 3a \qquad \ldots (2)$

$(1) \Rightarrow \quad a^2 - 3a - 4 = 0$ (சமன்பாடு (2))இன்படி

$\Rightarrow \quad a = 4$ அல்லது -1

$a = -1$ என்பது பொருத்தமற்றது

$$\therefore a = 4$$

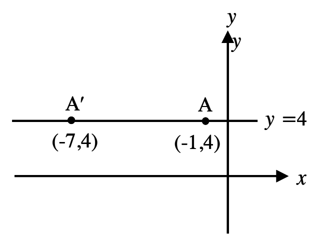
$$b^2 = 3a = 12$$

$\therefore$ எனவே தேவையான சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{12} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.25 : ஒரு நீள்வட்டத்தின் முனைகள் $(-1, 4)$, $(-7, 4)$ மற்றும் மையத்தொலைத் தகவு $\dfrac{1}{3}$ எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள விவரங்களின்படி நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு x அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. எனவே நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ என்ற வடிவில் அமையும்.



படம் 4.63

நீள்வட்டத்தின் மையம் ஆனது AA'இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

அதாவது, $\left(\dfrac{-1-7}{2}, \dfrac{4+4}{2}\right) = (-4, 4)$

எனவே, $\dfrac{(x+4)^2}{a^2} + \dfrac{(y-4)^2}{b^2} = 1$

மேலும் $AA' = 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) = 9\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8$$

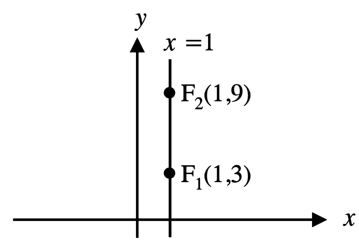
$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{(x+4)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{8} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.26 : *நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள்* (1, 3), (1, 9) *மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு* $\frac{1}{2}$ *எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள விவரங்களின்படி நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு y அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. எனவே அதன் சமன்பாடு

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



படம் 4.64

$F_1 F_2$இன் நடுப்புள்ளியானது நீள்வட்டத்தின் மையமாகும்.

$$\therefore \text{ மையம் } = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+9}{2}\right) = (1, 6)$$

$$F_1 F_2 = 2ae = 6$$

$$ae = 3$$

$$\text{ஆனால் } e = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad a = 6$$

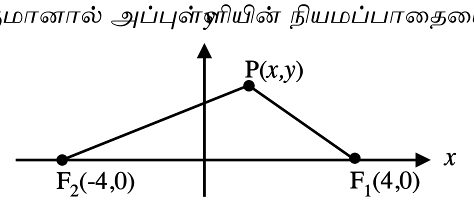
$$b^2 = a^2 (1 - e^2) = 36\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 27$$

தேவையான சமன்பாடு $\frac{(x-1)^2}{27} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

பண்பு (நிரூபணமின்றி) :

ஒரு புள்ளியானது, அப்புள்ளிக்கும் இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் கூடுதல் ஒரு மாறிலியாக இருக்குமாறு நகருமானால், அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை நீள்வட்டமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.27 : *ஒரு புள்ளியானது அப்புள்ளிக்கும்* (4, 0) *மற்றும்* (– 4, 0) *என்ற புள்ளிகளுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் கூடுதல்* 10*ஆக இருக்குமாறு நகருமானால் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.*



படம் 4.65

தீர்வு :

நிலைப்புள்ளிகள் (4, 0), (– 4, 0) *என்ற புள்ளிகளை* F_1 *மற்றும்* F_2 *என்க. நகரும் புள்ளியை* $P(x_1, y_1)$ *என்க.*

கொடுக்கப்பட்டவை $F_1P + F_2P = 10$

அதாவது, $\sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 - 0)^2} + \sqrt{(x_1 + 4)^2 + (y_1 - 0)^2} = 10$

சுருக்கிய பின்,

$$9{x_1}^2 + 25{y_1}^2 = 225.$$

$\therefore$ (x_1, y_1)*-இன் நியமப்பாதை* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.28 : *பின்வருவனவற்றின் நெட்டச்சு, குற்றச்சுக்களின் சமன்பாடுகளையும் நீளங்களையும் காண்க.*

(i) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (ii) $4x^2 + 3y^2 = 12$ (iii) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

தீர்வுகள் :

(i) *நெட்டச்சு* x*அச்சு வழியாகவும், குற்றச்சு* y *அச்சு வழியாகவும் செல்கிறது.* $\therefore$ *நெட்டச்சின் சமன்பாடு* $y = 0$. *குற்றச்சின் சமன்பாடு* $x = 0$. $a^2 = 9$; $b^2 = 4$ $\Rightarrow$ $a = 3$, $b = 2$

$\therefore$ *நெட்டச்சின் நீளம்* $2a = 6$, *மற்றும் குற்றச்சின் நீளம்* $2b = 4$

(ii) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

நெட்டச்சு y *அச்சு வழியாகவும் குற்றச்சு* x *அச்சு வழியாகவும் செல்கிறது.*

$\therefore$ *நெட்டச்சின் சமன்பாடு* $x = 0$ *மற்றும் குற்றச்சின் சமன்பாடு* $y = 0$ *இங்கு* $a^2 = 4$; $b^2 = 3$ $\Rightarrow$ $a = 2$, $b = \sqrt{3}$

$\therefore$ *நெட்டச்சின் நீளம்* $(2a) = 4$

குற்றச்சின் நீளம் $(2b) = 2\sqrt{3}$

(iii) $x - 1 = X$ *மற்றும்* $y + 1 = Y$ *என்க.*

$\therefore$ *எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு* $\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{16} = 1$

இங்கு நெட்டச்சு Y *அச்சு வழியாகவும் குற்றச்சு* X *அச்சு வழியாகவும் செல்கிறது.*

$\therefore$ *நெட்டச்சின் சமன்பாடு* $X = 0$ *குற்றச்சின் சமன்பாடு* $Y = 0$

(அ.து.), நெட்டச்சின் *சமன்பாடு* $x - 1 = 0$ *மற்றும் குற்றச்சின் சமன்பாடு* $y + 1 = 0$

மேலும் $a^2 = 16, \quad b^2 = 9$

$\Rightarrow \; a = 4, \quad b = 3$

$\therefore$ *நெட்டச்சின் நீளம்* $(2a) = 8$

$\therefore$ *குற்றச்சின் நீளம்* $(2b) = 6$

எடுத்துக்காட்டு 4.29 : $6x^2 + 9y^2 + 12x - 36y - 12 = 0$ *என்ற நீள்வட்டத்தின் அச்சுக்களின் சமன்பாட்டையும் நீளத்தையும் காண்க.*

தீர்வு :

$$
\begin{aligned}
6x^2 + 9y^2 + 12x - 36y - 12 &= 0 \\
(6x^2 + 12x) + (9y^2 - 36y) &= 12 \\
6(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) &= 12 \\
6\{(x+1)^2 - 1\} + 9\ \{(y-2)^2 - 4\} &= 12 \\
6(x+1)^2 + 9\ (y-2)^2 &= 12 + 6 + 36 \\
6(x+1)^2 + 9(y-2)^2 &= 54 \\
\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{6} &= 1
\end{aligned}
$$

$X = x + 1 \; ; \quad Y = y - 2$ *என்க.*

எனவே *சமன்பாடு* $\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{6} = 1$

நெட்டச்சு X *அச்சு வழியாகவும் மற்றும் குற்றச்சு* Y *அச்சு வழியாகவும் செல்கிறது என்பது தெளிவாகின்றது.*

$\therefore$ *நெட்டச்சின் சமன்பாடு* $Y = 0$ *மற்றும் குற்றச்சின் சமன்பாடு* $X = 0.$

அதாவது நெட்டச்சின் சமன்பாடு $y - 2 = 0$ *மற்றும் குற்றச்சின் சமன்பாடு* $x + 1 = 0$

அதாவது, நெட்டச்சின் சமன்பாடு $y - 2 = 0$

இங்கு $a^2 = 9, \;\; b^2 = 6 \;\; \Rightarrow \; a = 3, \quad b = \sqrt{6}$

$\therefore$ *நெட்டச்சின் நீளம்* $(2a) = 6$

குற்றச்சின் நீளம் $(2b) = 2\sqrt{6}$

எடுத்துக்காட்டு 4.30 : *பின்வரும் நீள்வட்டங்களின் இயக்குவரைகளின் சமன்பாடுகள், செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள் மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க :*

(i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $25x^2 + 9y^2 = 225$ (iii) $4x^2 + 3y^2 + 8x + 12y + 4 = 0$

தீர்வு :

(i) நெட்டச்சு x அச்சு வழிச் செல்கிறது.

இங்கு $a^2 = 16, b^2 = 9$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

இயக்குவரைகளின் சமன்பாடுகள் $x = \pm \frac{a}{e}$

$$x = \frac{\pm 16}{\sqrt{7}}$$

செவ்வகலங்களின் சமன்பாடுகள் $x = \pm ae$

$$x = \pm \sqrt{7}$$

செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$

(ii) $25x^2 + 9y^2 = 225$ $\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

இங்கு $a^2 = 25, \quad b^2 = 9$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

இயக்குவரைகளின் சமன்பாடுகள் $y = \pm \frac{a}{e}$

$$y = \frac{\pm 25}{4}$$

செவ்வகலங்களின் சமன்பாடுகள் $y = \pm ae$

$$y = \pm 4$$

செவ்வலகத்தின் நீளம் $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{5} = \frac{18}{5}$

(iii)

$$4x^2 + 3y^2 + 8x + 12y + 4 = 0$$

$$(4x^2 + 8x) + (3y^2 + 12y) + 4 = 0$$

$$4(x^2 + 2x) + 3(y^2 + 4y) = -4$$

$$4\{(x + 1)^2 - 1\} + 3\{(y + 2)^2 - 4\} = -4$$

$$4(x + 1)^2 + 3(y + 2)^2 = 12$$

$$\frac{(x + 1)^2}{3} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{4} = 1 \text{ இங்கு } X = x + 1 \;,\; Y = y + 2$$

நெட்டச்சு Y அச்சுவழிச் செல்கிறது. இங்கு $a^2 = 4$, $b^2 = 3$ மற்றும் $e = \frac{1}{2}$

இயக்குவரைகளின் சமன்பாடுகள் $Y = \pm \frac{a}{e}$ அதாவது $Y = \pm \frac{2}{(1/2)}$

$Y = \pm 4$

(i) $Y = 4 \Rightarrow y + 2 = 4 \Rightarrow y = 2$

(ii) $Y = -4 \Rightarrow y + 2 = -4 \Rightarrow y = -6$

எனவே இயக்குவரை சமன்பாடுகள் $y = 2$ மற்றும் $y = -6$

செவ்வகலங்களின் சமன்பாடுகள் $Y = \pm ae$ (அ.து.), $Y = \pm 2\left(\frac{1}{2}\right)$

$Y = \pm 1$

(i) $Y = 1 \Rightarrow y + 2 = 1$

$\Rightarrow y = -1$

(ii) $Y = -1 \Rightarrow y + 2 = 1$

$\Rightarrow y = -3$

$\therefore$ செவ்வகலங்களின் சமன்பாடுகள் $y = -1$ மற்றும் $y = -3$

செவ்வகலத்தின் நீளம் = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$

எடுத்துக்காட்டு 4.31 : பின்வரும் நீள்வட்டங்களின் மையத் தொலைத்தகவு, மையம், குவியங்கள், முனைகள் ஆகியவற்றைக் காண்க **:**

(i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

(iii) $\frac{(x+3)^2}{6} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$ (iv) $36x^2 + 4y^2 - 72x + 32y - 44 = 0$

தீர்வு : (i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

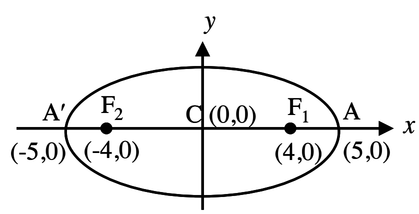
நெட்டச்சு x-வழிச் செல்கிறது. $a^2 = 25$, $b^2 = 9$

$e = \frac{4}{5}$ மற்றும் $ae = 4$

மையம் $C\,(0, 0)$,

குவியங்கள் $(\pm ae, 0) = (\pm 4, 0)$

முனைகள் $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$



படம் 4.66

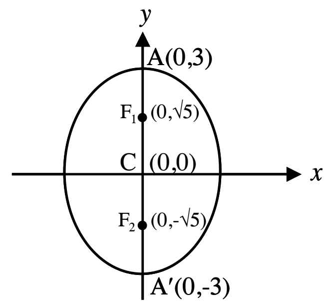
(ii) நெட்டச்சு y வழிச் செல்கிறது $a^2 = 9, b^2 = 4$

$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ மற்றும் $ae = \sqrt{5}$

மையம் C (0, 0)

குவியங்கள் $(0, \pm ae) = (0, \pm\sqrt{5})$

முனைகள் $(0, \pm a) = (0, \pm 3)$



படம் 4.67

(iii) $x + 3 = X,\ \ y - 5 = Y$ என்க.

எனவே சமன்பாடு $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{4} = 1$

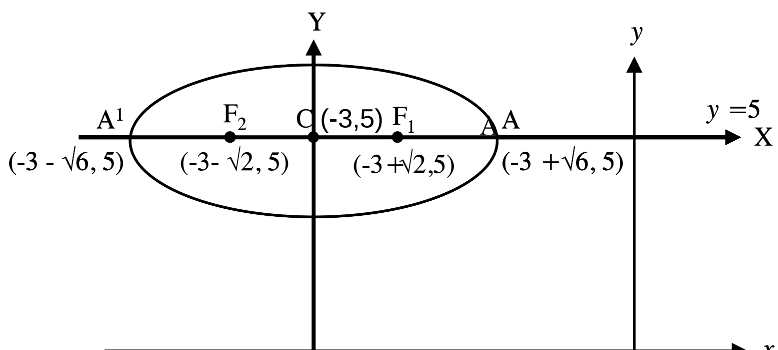
நெட்டச்சு X-அச்சவழிச் செல்கிறது.

$a^2 = 6, \ \ b^2 = 4$

$e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ மற்றும் $ae = \sqrt{2}$

	X, Yஐப் பொறுத்து	x, yஐப் பொறுத்து $X = x + 3\ ;\ Y = y - 5$
மையம்	(0, 0)	$X = 0\ ;\ Y = 0$ $\Rightarrow\ x + 3 = 0,\ y - 5 = 0$ $x = -3,\ y = 5$ மையம் $C(-3, 5)$
முனைகள்	$(\pm a, 0)$ i.e. $(\pm\sqrt{6}, 0)$ (i) $(\sqrt{6}, 0)$	(i) $X = \sqrt{6},\ Y = 0$ $x + 3 = \sqrt{6},\ y - 5 = 0$ $x = \sqrt{6} - 3,\ y = 5$ $A(-3 + \sqrt{6}, 5)$
	(ii) $(-\sqrt{6}, 0)$	(ii) $X = -\sqrt{6},\ Y = 0$ $x + 3 = -\sqrt{6},\ y - 5 = 0$ $x = -3 - \sqrt{6},\ y = 5$ $A'(-3 - \sqrt{6}, 5)$

குவியங்கள்	$(\pm ae, 0)$ i.e. $\left(\pm\sqrt{2}\,, 0\right)$ (i) $\left(\sqrt{2}\,, 0\right)$	(i) $X = \sqrt{2}\,,\ Y = 0$ $x + 3 = \sqrt{2}\,,\ y - 5 = 0$ $x = -3 + \sqrt{2}\,, y = 5$ $F_1\left(-3 + \sqrt{2}\,, 5\right)$
	(ii) $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$	(ii) $X = -\sqrt{2}\,,\ Y = 0$ $x + 3 = -\sqrt{2}\,, y - 5 = 0$ $x = -3 - \sqrt{2}\,, y = 5$ $F_2\left(-3 - \sqrt{2}\,, 5\right)$



படம் 4.68

(iv) $36x^2 + 4y^2 - 72x + 32y - 44 = 0$

$$36\,(x^2 - 2x) + 4\,(y^2 + 8y) = 44$$

$$36\,\{(x-1)^2 - 1\} + 4\,\{(y+4)^2 - 16\} = 44$$

$$36(x-1)^2 + 4\,(y+4)^2 = 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

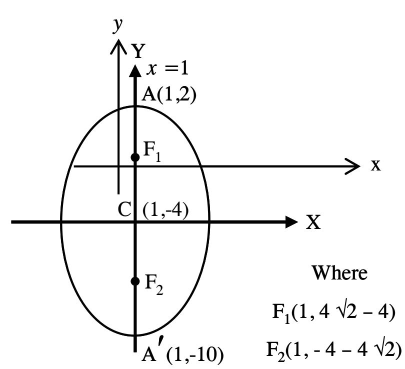
i.e., $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{36} = 1$ இங்கு $X = x - 1\,, Y = y + 4$

நெட்டச்சு Y-அச்சுவழிச் செல்கிறது.

$a^2 = 36,\quad b^2 = 4$

$e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ மேலும் $ae = 4\sqrt{2}$

	X, Yஐ பொறுத்து	x, yஐ பொறுத்து $X = x - 1$; $Y = y + 4$
மையம்	(0, 0)	$X = 0$; $Y = 0$ $\Rightarrow$ $x - 1 = 0$, $y + 4 = 0$ $x = 1, y = -4$ மையம் $C(1, -4)$
முனைகள்	$(0, \pm a)$ i.e. $(0, \pm 6)$ (i) (0, 6)	(i) $X = 0$, $Y = 6$ $x - 1 = 0$, $y + 4 = 6$ $x = 1$, $y = 2$ $A\ (1, 2)$
	(ii) $(0, -6)$	(ii) $X = 0, Y = -6$ $x - 1 = 0, y + 4 = -6$ $x - 1 = 0$, $y + 4 = -6$ $x = 1$, $y = -10$ $A'\ (1, -10)$
குவியங்கள்	$(0, \pm ae)$ i.e. $\left(0, \pm 4\sqrt{2}\right)$ (i) $\left(0, 4\sqrt{2}\right)$	(i) $X = 0$; $Y = 4\sqrt{2}$ $x - 1 = 0$, $y + 4 = 4\sqrt{2}$ $x = 1, y = 4\sqrt{2} - 4$ $F_1\left(1, 4\sqrt{2} - 4\right)$
	(ii) $\left(0, -4\sqrt{2}\right)$	(ii) $X = 0$, $Y = -4\sqrt{2}$ $x - 1 = 0$; $y + 4 = -4\sqrt{2}$ $x = 1$, $y = -4 - 4\sqrt{2}$ $F_2\left(1, -4 - 4\sqrt{2}\right)$



படம் 4.69

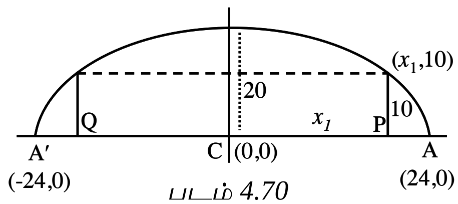
4.4.6 சிலநடைமுறை கணக்குகள் **(Some practical problems) :**

எடுத்துக்காட்டு 4.32 : *ஒரு வளைவு அரை-நீள்வட்ட வடிவத்தில் உள்ளது. அதன் அகலம் 48 அடி, உயரம் 20 அடி. தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் என்ன?*

தீர்வு :

தரையின் நடுப்புள்ளியை மையம் C (0, 0)ஆகக் கொள்க.

தரையின் அகலம் 48 அடி என்பதால் முனைகள் A, A' ஆனவை $A(24, 0)$ $A'(-24, 0)$ ஆகும்.



படம் 4.70

$2a = 48$ *மற்றும்* $b = 20$ *என்பது தெளிவாகிறது.*

$\therefore$ *அதற்குரிய நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு* $\dfrac{x^2}{24^2} + \dfrac{y^2}{20^2} = 1$ … (1)

10*மீ உயரமுள்ள தூணிற்கும் மையத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம்* x_1 *என்க.*

எனவே $(x_1, 10)$ *என்ற புள்ளி சமன்பாடு* (1) *ஐ நிறைவு செய்யும்.*

$$\therefore \frac{{x_1}^2}{24^2} + \frac{10^2}{20^2} = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 12\sqrt{3}$$

$\therefore$ *தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் என்பது* $2x_1 = 24\sqrt{3}$

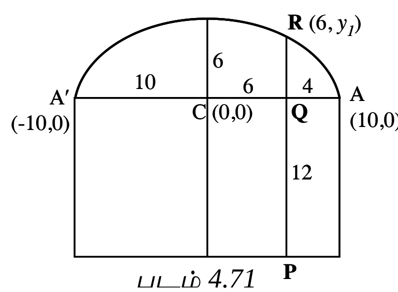
$\therefore$ *தேவையான வளைவின் அகலம்* $24\sqrt{3}$ *அடி.*

எடுத்துக்காட்டு 4.33 : *ஒரு நுழைவு வாயிலின் மேற்கூரையானது அரை-நீள்வட்ட வடிவத்தில் உள்ளது. இதன் அகலம் 20அடி. மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 18 அடி மற்றும் பக்கச் சுவர்களின் உயரம் 12 அடி எனில் ஏதேனும் ஒரு பக்கச் சுவரிலிரந்து 4 அடி தூரத்தில் மேற்கூரையின் உயரம் என்னவாக இருக்கும்?*

தீர்வு : *பக்கச் சுவரிலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் உள்ள மேறகூரையின் உயரம் PQR என்க. படத்தின் மூலம் $PQ = 12$ அடி*

QR-இன் நீளத்தைக் காண்போம்.

அகலம் 20 அடியாக இருப்பதால் முனைகள் A, A'இன் ஆயத்தொலைகள் $(-10, 0)$, $(10, 0)$ *எனக் கொள்க.*



படம் 4.71

படத்தின் மூலம் $AA' = 2a = 20 \Rightarrow a = 10$

மற்றும் $b = 18 - 12 = 6$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

QR என்பது y_1 எனில் R-இன் ஆயத்தொலைகள் $(6, y_1)$

நீள்வட்டத்தின் மீது R அமைவதால்,

$$\frac{36}{100} + \frac{y_1^{\,2}}{36} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4.8$$

$$\therefore \; PQ + QR = 12 + 4.8$$

$\therefore$ தேவையான மேற்கூரையின் உயரம் 16.8 அடியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.34 : சூரியன் குவியத்திலிருக்குமாறு பூமியானது சூரியனை ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் சுற்றி வருகிறது. அதன் அரை-நெட்டச்சின் நீளம் 92.9 மில்லியன் மைல்கள் ஆகாகவும், மையத் தொலைத் தகவு 0.017ஆகாகவும் உள்ளது எனில் பூமியானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரமும் மிகத் தொலைவில் இருக்கும்போது உள்ள தூரமும் காண்க.

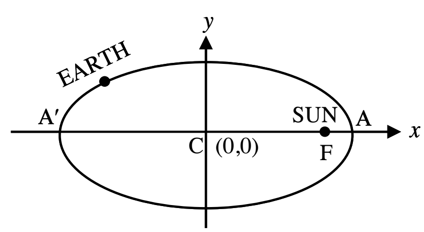
தீர்வு :

அரை நெட்டச்சின் நீளம்

$CA = a = 92.9$ மில்லியன் மைல்கள்

$e = 0.017$எனப்பட்டுள்ளது.

சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம் $= FA$ மற்றும் மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம் $= FA'$



படம் 4.72

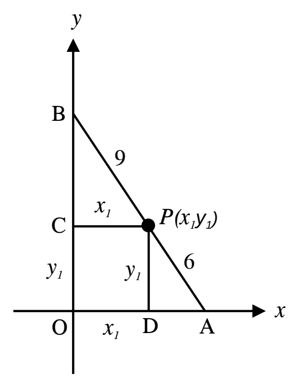
$$CF = ae = 92.9 \times 0.017$$
$$\begin{aligned} FA = CA - CF &= 92.9 - 92.9 \times 0.017 \\ &= 92.9\,[1 - 0.017] \\ &= 92.9 \times 0.983 = 91.3207 \text{ மில்லியன் மைல்கள்} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} FA' = CA' + CF &= 92.9 + 92.9 \times 0.017 \\ &= 92.9\,(1 + 0.017) \\ &= 92.9 \times 1.017 = 94.4793 \text{ மில்லியன் மைல்கள்} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.35 : ஒரு சமதளத்தின் மேல் செங்குத்தாக அமைந்துள்ள சுவரின் மீது 15மீ நீளமுள்ள ஒரு ஏணியானது தளத்தினையும் சுவற்றினையும் தொடுமாறு நகர்ந்து கொண்டு இருக்கிறது எனில், ஏணியின் கீழ்மட்ட முனையிலிருந்து 6மீ தூரத்தில் ஏணியில் அமைந்துள்ள P என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

தீர்வு :

AB என்பது ஏணி என்க. ஏணியின் மீது $P(x_1, y_1)$ *என்ற புள்ளி* $AP = 6$*மீ இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்க.*

x-*அச்சுக்கு செங்குத்தாக* PD*யும்* y-*அச்சுக்கு செங்குத்தாக* PC*யும் வரைக.*



படம் 4.73

ΔADP *மற்றும்* ΔPCB *வடிவொத்தவை*

$$\therefore \quad \frac{PC}{DA} = \frac{PB}{AP} = \frac{BC}{PD}$$

i.e., $$\frac{x_1}{DA} = \frac{9}{6} = \frac{BC}{y_1}$$

$$\Rightarrow \quad DA = \frac{6x_1}{9} = \frac{2x_1}{3} \quad ; \quad BC = \frac{9y_1}{6} = \frac{3}{2}\,y_1$$

$$OA = OD + DA = x_1 + \frac{2x_1}{3} = \frac{5}{3}\,x_1 \; ; \; OB = OC + BC = y_1 + \frac{3y_1}{2} = \frac{5}{2}\,y_1$$

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{9}x_1^2 + \frac{25}{4}y_1^2 = 225$$

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 9$$

$\therefore (x_1, y_1)$*இன் நியமப்பாதை* $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, *இது ஓர் நீள் வட்டமாகும்.*

பயிற்சி 4.2

(1) *பின்வரும் விவரங்களுக்குரிய நீள் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.*

(i) *ஒரு குவியம்* $(0, -1)$, *ஒத்த இயக்குவரை* $3x + 16 = 0$ *மற்றும்* $e = \dfrac{3}{5}$

(ii) *குவியங்கள்* $(2, -1), (0, -1)$ *மற்றும்* $e = \dfrac{1}{2}$

(iii) *குவியங்கள்* $(\pm 3, 0)$ *மற்றும் முனைகள்* $(\pm 5, 0)$

(iv) *மையம்* $(3, -4)$, *ஒரு குவியம்* $\left(3 + \sqrt{3}, -4\right)$ *மற்றும்* $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(v) மையம் ஆதி, நெட்டச்சு x வழியானது, $e = \frac{2}{3}$ மற்றும் $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதும்

(vi) அரை நெட்டச்சின் நிளம், செவ்வகலத்தின் நீளம் முறையே 7, $\frac{80}{7}$ மையம் (2, 5) மற்றும் நெட்டச்சு y-அச்சுக்கு இணையானது.

(vii) மையம் (3, – 1) ஒரு குவியம் (6, – 1) மற்றம் (8, – 1) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வது.

(viii) குவியங்கள் (± 3, 0) மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{32}{5}$.

(ix) முனைகள் (± 4, 0) மற்றும் $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) ஒரு நீள்வட்டத்தின் மையம் (4, – 2) மற்றும் ஒரு குவியம் (4, 2) எனில் அதன் மற்றொரு குவியம் காண்க.

(3) ஒரு புள்ளியானது, அப்புள்ளிக்கும் (3, 0) மற்றும் (–3, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் கூடுதல் 9ஆக இருக்குமாறு நகருமானால் அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

(4) நெட்டச்சு மற்றும் குற்றச்சுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $9x^2 + 25y^2 = 225$ (iii) $9x^2 + 4y^2 = 20$

(ii) $5x^2 + 9y^2 + 10x - 36y - 4 = 0$ (iv) $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$

(5) பின்வரும் நீள்வட்டங்களின் இயக்குவரைகளின் சமன்பாட்டையும் செவ்வகலத்தின் நீளங்களையும் காண்க.

(i) $25x^2 + 169y^2 = 4225$ (ii) $9x^2 + 16y^2 = 144$

(iii) $x^2 + 4y^2 - 8x - 16y - 68 = 0$ (iv) $3x^2 + 2y^2 - 30x - 4y + 23 = 0$

(6) பின்வரும் நீள்வட்டங்களின் மையத் தொலைத் தகவு, மையம், குவியங்கள், முனைகள் ஆகியவற்றைக் காண்க மற்றும் வரைபடம் வரைக.

(i) $16x^2 + 25y^2 = 400$ (ii) $x^2 + 4y^2 - 8x - 16y - 68 = 0$

(iii) $9x^2 + 4y^2 = 36$ (iv) $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y = 92$

(7) ஒரு கோ-கோ விளையாட்டு வீரர் விளையாட்டுப் பயிற்சியின்போது அவருக்கும் கோ-கோ குச்சிகளுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் எப்பொழுதும் 8மீ ஆக இருக்குமாறு உணர்கிறார். அவ்விரு குச்சிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 6மீ எனில் அவர் ஓடும் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) ஒரு நீள்வட்டப் பாதையின் குவியத்தில் பூமி இருக்குமாறு ஒரு துணைக்கோள் சுற்றி வருகிறது. இதன் மையத் தொலைத் தகவு ½ ஆகவும் பூமிக்கும் துணைக் கோளுக்கும் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் 400 கிலோ மீட்டர்கள் ஆகவும் இருக்குமானால் பூமிக்கும் துணைக்கோளுக்கும் இடைப்பட்ட அதிகபட்ச தூரம் என்ன?

(9) சூரியன் குவியத்திலிருக்குமாறு மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனை ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் சுற்றி வருகிறது. அதன் அரை நெட்டச்சின் நீளம் 36 மில்லியன் மைல்கள் ஆகவும் மையத் தொலைத் தகவு 0.206 ஆகவும் இருக்குமாயின் (i) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம் (ii) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும்போது உள்ள தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(10) ஒரு பாலத்தின் வளைவானது அரை நீள்வட்டத்தின் வடிவில் உள்ளது. கிடைமட்டத்தில் அதன் அகலம் 40 அடியாகவும் மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 16 அடியாகவும் உள்ளது எனில் மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடப்புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் என்ன?

4.5 அதிபரவளையம் (Hyperbola) :

வரையறை : தளத்தில், ஒரு நிலைப்புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரம் அத்தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைக் கோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்துடன் மாறிலி விகிதத்தை ஏற்படுத்தி அவ்விகித மதிப்பு ஒன்றைவிட அதிகமாக இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் நியமப் பாதையானது ஒரு அதிபரவளையமாகும்.

குறிப்பு : பாடத்திட்டத்தின்படி சமன்பாட்டின் வரைமுறை (4.5.1, 4.5.2) மற்றும் அதிபரவளையத்தினை வரையும் முறை தேவையில்லை. சமன்பாட்டின் அமைப்பு மற்றும் அதன் வளைவரையின் அமைப்பு மட்டுமே தேவை. இருப்பினும், கற்றல் திறனை அதிகரிக்கும் நோக்குடன் சமன்பாட்டின் வரைமுறையும் வளைவரையின் போக்கும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

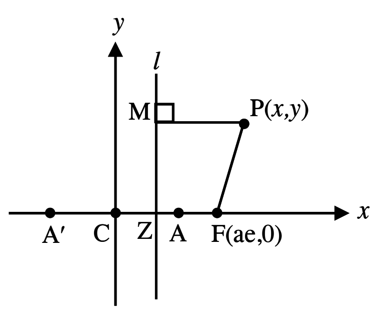
4.5.1 அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடு (Standard equation of the hyperbola) :

கொடுக்கப்பட்டவை**:**

★ நிலைப்புள்ளி (F)
★ நிலைக்கோடு (l)
★ மையத் தொலைவு விகிதம் e, ($e > 1$)
★ நகரும் புள்ளி $P(x, y)$

வரைமுறை **:**

★ நிலைப்புள்ளி Fஐ குறிக்கவும் மேலும் நிலைக்கோடு 'l'ஐ வரையவும்.
★ Fஇலிருந்து lக்கு (FZ) என்ற குத்துக்கோட்டை வரைக.



படம் 4.74

★ Pஇலிருந்து lக்கு (PM) என்ற குத்துக்கோட்டை வரைக.

★ FZஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் $e : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் முறையே A, A' என்க.

★ $AA' = 2a$ என்க. இதை x-அச்சு என்க.

★ AA'-இன் மையக் குத்துக் கோட்டை வரைந்து அதை y-அச்சு என்க. Cயை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொள்வோம்.

$C(0, 0), A(a, 0), A'(-a, 0)$ ஆகும்.

F மற்றும் Mஇன் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காணல் :

FZஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் $e : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் A, A' எனவே,

$$\frac{FA}{AZ} = \frac{e}{1}$$

$$\therefore FA = e\,AZ$$

$$\text{i.e. } CF - CA = e\,(CA - CZ)$$

$$\therefore CF - a = e\,(a - CZ) \quad \ldots(1)$$

$$\frac{FA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

$$\therefore FA' = e\,A'Z$$

$$\text{i.e. } A'C + CF = e\,(A'C + CZ)$$

$$\therefore a + CF = e(a + CZ) \quad \ldots(2)$$

$$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad 2a = e\,[2CZ] \;\Rightarrow\; CZ = \frac{a}{e}$$

$$(2) + (1) \quad \Rightarrow \quad 2CF = e(2a) \;\Rightarrow\; CF = ae$$

$\therefore M$ என்பது $\left(\frac{a}{e},\ y\right)$ மேலும் $F\,(ae, 0)$ ஆகும்.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காணல் :

P என்ற புள்ளி அதிபரவளையத்தின் மேல் அமைவதால்,

$$\frac{FP}{PM} = e \quad \therefore \quad FP^2 = e^2PM^2$$

$$\therefore \quad (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2\left[\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + (y - y)^2\right]$$

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2\,\frac{[e^2x^2 - 2aex + a^2]}{e^2}$$

$$x^2 - e^2x^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ இங்கு $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$ மிகை எண்ணாகும்.

இதுவே அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடாகும்.

4.5.2 அதிபரவளையத்தை வரைதல் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) சமச்சீர் (Symmetry) :

வளைவரை x, y அச்சுக்களைப் பொறுத்து சமச்சீர் உடையது. அதனால் ஆதிப்புள்ளியைப் பொறுத்தும் சமச்சீருடையது

(ii) முக்கியப் புள்ளிகள் (Special points) :

அதிபரவளையம், ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்லாது.

$y = 0$ எனில், x-அச்சின் மேலுள்ள புள்ளிகள் $x = \pm a$ ஆகும்.

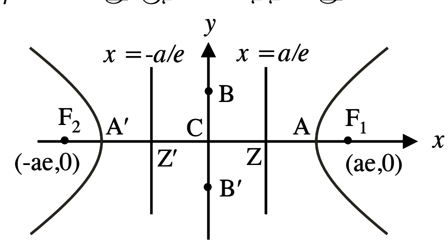
$\therefore$ வளைவரை x-அச்சை $A(a, 0)$ மேலும் $A'(-a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. $x = 0$ எனில் $y^2 = -b^2$. அதாவது, y கற்பனை மதிப்பாகும், எனவே வளைவரை y-அச்சை வெட்டாது.

(iii) வளைவரையின் இருப்பு (Existence of the curve) :

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டை $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ என எழுதலாம். $x^2 - a^2 < 0$ எனில் $-a < x < a$, y கற்பனை மதிப்பை பெறுகிறது. வளைவரையானது $-a < x < a$ என்ற இடைவெளியில் அமையாது. $x \leq -a$ அல்லது $x \geq a$ பகுதிகளிலேதான் வளைவரை அமையும். yஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் வளைவரை அமையும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

(iv) கந்தழியில் வளைவரை (The curve at infinity) :

x இன் மதிப்பு கூடும் பொழுது, y^2இன் மதிப்பும் கூடுகிறது. அதாவது, $x \to \infty$ எனில், $y^2 \to \infty$. அதாவது, $x \to \infty$ எனில் $y \to \pm \infty$.



படம் 4.75

வளைவரையின் கிளைகள் இருபுறமும் கந்தழி வரை செல்கின்றன.

4.5.3 அதிபரவளையத்தின் முக்கிய வரையறைகள் :

குவியம் : நிலைப்புள்ளியை அதிபரவளையத்தின் குவியம் $F_1(ae, 0)$ ஆகும்.

இயக்குவரை : நிலைக்கோடு, அதிபரவளையத்தின் இயக்கு வரையாகும். இதன் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$.

குறுக்கச்சு : முனைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் AA' என்ற கோட்டுத்துண்டு குறுக்கச்சு எனப்படும். மேலும் குறுக்கச்சின் நீளம் $2a$ ஆகும். குறுக்கச்சின் சமன்பாடு $y = 0$. குறுக்கச்சு அதிபர வளையத்தின் இரு கிளைகளையும் வெட்டுகிறது.

துணையச்சு : புள்ளிகள் $B(0, b)$யையும் $B'(0, -b)$யையும் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு துணையச்சாகும். துணையச்சின் நீளம் $2b$. மேலும் இதன் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.

மையம் : குறுக்கச்சு, துணையச்சு இவற்றின் வெட்டும் புள்ளியே அதிபர வளையத்தின் மையப் புள்ளியாகும். இங்கு $C(0,0)$ அதிபரவளையத்தின் மையமாகும்.

முனைப் புள்ளிகள் : அதிபரவளையம், குறுக்கச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் அதிபரவளையத்தின் முனைப் புள்ளிகளாகும். $A(a, 0)$ மற்றும் $A'(-a, 0)$ முனைப் புள்ளிகளாகும்.

நீள் வட்டத்தைப் போலவே, அதிபரவளையத்திற்குள் இரண்டாம் குவியம் $F_2(-ae, 0)$ மற்றும் இரண்டாம் இயக்குவரை $x = -\frac{a}{e}$ உண்டு.

மையத் தொலைத் தகவு : $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

மேற்குறிப்பு :

அதிபரவளையத்திற்கு $e > 1$. $e \to 1$ எனில், $\frac{b}{a} \to 0$ அதாவது, $e \to 1$ எனில் bஇன் மதிப்பு a உடன் ஒப்பிடுகையில் மிகக் குறைவாக உள்ளது. $\therefore$ அதிபரவளையம் கூரிய மூக்கு வடிவத்தைப் பெறுகிறது. $e \to \infty$ எனில், bஇன் மதிப்பு a-ஐ விட மிக அதிகமாகிறது. அதிபரவளையம் தட்டையாகிறது.

செவ்வகலம் : இது அதிபரவளையத்தின் அச்சிற்குச் செங்குத்தான குவிநாண் ஆகும். இதன் சமன்பாடுகள் $x = \pm ae$.

செவ்வகலத்தின் இறுதிப் புள்ளிகளும் அதன் நீளமும் :

செவ்வகலத்தின் இறுதிப் புள்ளிகளைக் காண,

$x = ae \ldots (1)$ மற்றும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots (2)$-ஐ தீர்க்க.

சமன்பாடு (1)-ஐ (2)-இல் பிரதியிட,

$$\frac{a^2 e^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \ \frac{y^2}{b^2} = e^2 - 1$$

$$\therefore \ y^2 = b^2 (e^2 - 1)$$

$$= b^2 . \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \quad (\because b^2 = a^2 (e^2 - 1))$$

$$\therefore \ y = \pm \frac{b^2}{a}$$

L_1 மற்றும் L_1' செவ்வகலத்தின் இறுதிப்புள்ளிகள் எனில் $L_1 \left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$, $L_1' \left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ ஆகும்.

இதுபோல இரண்டாவது செவ்வகலத்தின் இறுதிப்புள்ளிகள் $\left(-ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$ ஆகும். செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a}$.

மேற்கூறிய அதிபரவளையத்தில், குறுக்கச்சு x-அச்சின் வழியில் உள்ளது. குறுக்கச்சு y-அச்சின் வழியில் அமையுமாறு மேலும் ஒரு திட்ட அதிபரவளையம் உள்ளது.

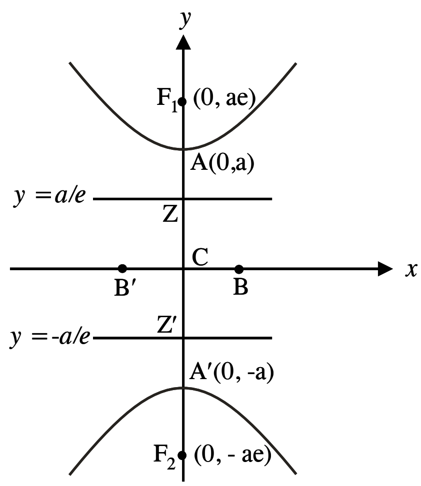
4.5.4 அதிபரவளையத்தின் மற்றொரு வடிவம் (The other form of the hyperbola) :

y-அச்சின் வழியே குறுக்கச்சும், x-அச்சின் வழியே துணையச்சும் அமைந்தால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ஆகும். இந்த அதிபரவளையத்திற்கு கீழ்க்காணும் பண்புகளை முந்தைய அதிபரவளையத்திற்குக் கண்டதுபோல் காண்போம்.

மையம்	:	$C (0, 0)$
முனைகள்	:	$A (0, a)$, $A' (0, -a)$
குவியங்கள்	:	$F_1 (0, ae)$, $F_2 (0, -ae)$
குறுக்கச்சின் சமன்பாடு	:	$x = 0$
துணையச்சின் சமன்பாடு	:	$y = 0$
துணையச்சின் முனைப்புள்ளிகள்	:	$(b, 0)$, $(-b, 0)$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள்	:	$y = \pm ae$

இயக்குவரையின் சமன்பாடுகள் : $y = \pm \frac{a}{e}$

செவ்வகலத்தின் இறுதிப் புள்ளிகள் : $\left(\pm \frac{b^2}{a},\ ae\right), \left(\pm \frac{b^2}{a},\ -ae\right)$



படம் 4.76

எடுத்துக்காட்டு 4.36 : இயக்குவரை $2x + y = 1$, குவியம் $(1, 2)$ மேலும் மையத் தொலைத்தகவு $\sqrt{3}$ எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அதிபரவளையத்தின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $P(x, y)$ என்க.

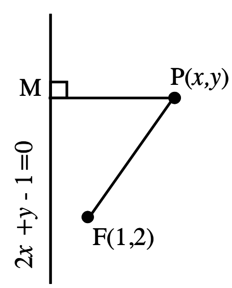
வரையறையின்படி $\frac{\text{FP}}{\text{PM}} = e \quad \therefore FP^2 = e^2 . PM^2$

i.e., $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3\left(\frac{2x+y-1}{\sqrt{4+1}}\right)^2$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{3}{5}(2x+y-1)^2$

i.e., $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$

இதுவே தேவையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடாகும்.



படம் 4.77

எடுத்துக்காட்டு 4.37 : மையம் (0, 0) அரைக் குறுக்கச்சின் நீளம் 6, மையத் தொலைத் தகவு 3 மற்றும் x அச்சை குறுக்கச்சாக உடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

குறுக்கச்சு x வழிச் செல்வதாலும், மையம் (0, 0)ஆக உள்ளதால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

கொடுக்கப்பட்டவை :

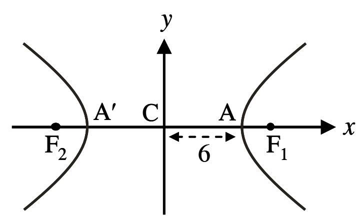
அரைக்குறுக்கச்சு $a = 6, e = 3$

$b^2 = a^2 (e^2 - 1)$ எனத் தெரியும்.

$$\therefore\ b^2 = 36(8) = 288$$

$\therefore$ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{288} = 1$$



படம் 4.78

எடுத்துக்காட்டு 4.38 : குறுக்கச்சு, x-அச்சுக்கு இணையாகவும், மையம் (1, 2) துணையச்சின் நீளம் 4 மேலும் மையத் தொலைத் தகவு $e = 2$ என உடைய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : குறுக்கச்சு x-அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

இங்கு மையம் $C(h, k)$ என்பது (1, 2) ஆகும்.

குறுக்கச்சின் நீளம் $2b = 4$ மேலும் $e = 2$

$$b^2 = a^2 (e^2 - 1)$$

$$4 = a^2 (4 - 1)$$

$$\Rightarrow\ a^2 = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $\frac{(x-1)^2}{4/3} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.39 : மையம் (1, 2) , இயக்குவரைகளின் இடைப்பட்ட தூரம் $\frac{20}{3}$, குவியங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 30, குறுக்கச்சு y-அச்சுக்கு இணையாகவும் அமையும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

குறுக்கச்சு y-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளதால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

இங்கு மையம் $C(h, k)$ என்பது $(1, 2)$ ஆகும்.

இயக்குவரைகளின் இடையே உள்ள தூரம் $= \frac{2a}{e} = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{10}{3}$

குவியங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் $= 2ae = 30 \Rightarrow ae = 15$

$$\frac{a}{e}(ae) = \frac{10}{3} \times 15 \Rightarrow a^2 = 50$$

மேலும் $\frac{ae}{a/e} \Rightarrow e^2 = \frac{9}{2}$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow b^2 = 50\left(\frac{9}{2} - 1\right) = 175$$

$\frac{(y-2)^2}{50} - \frac{(x-1)^2}{175} = 1$ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.40 : குறுக்கச்சு y-அச்சிற்கு இணையாகவும், மையம் $(0, 0)$, அரை துணையச்சின் நீளம் 4, மேலும் மையத் தொலைத் தகவு 2 எனவும் அமையும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ஆகும்.

அரை துணையச்சு $b = 4$ மேலும் $e = 2$,

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$4^2 = a^2(2^2 - 1)$$

$$\therefore \ a^2 = \frac{16}{3}$$

$\therefore$ தேவையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{16/3} - \frac{x^2}{16} = 1$

அல்லது $3y^2 - x^2 = 16$

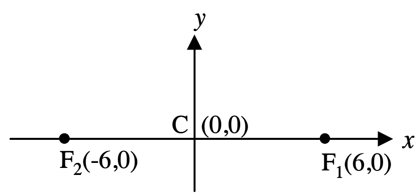
எடுத்துக்காட்டு 4.41 : குவியங்கள் $(\pm 6, 0)$ மேலும் குறுக்கச்சின் நீளம் 8 ஆகவும் உள்ள அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து குறுக்கச்சு x-அச்சவழிச் செல்வதால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

$F_1\, F_2$வின் நடுப்புள்ளியே அதிபரவளையத்தின் மையமாகும்.



படம் 4.79

$$C \text{ என்பது } \left(\frac{-6+6}{2}\ ,\ \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$$

குறுக்கச்சின் நீளம் $= 2a = 8, \ \Rightarrow\ a = 4$

$$F_1F_2 = 2ae = 12 \ \Rightarrow\ ae = 6$$

$$\therefore 4e = 6$$

$$e = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$b^2 = a^2\,(e^2 - 1) = 16\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{16 \times 5}{4} = 20$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \text{ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.}$$

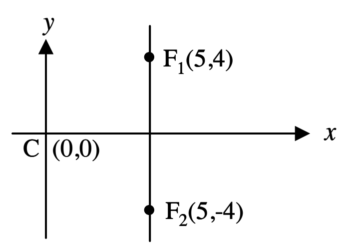
எடுத்துக்காட்டு 4.42 : குவியங்கள் $(5, \pm 4)$ மேலும் மையத் தொலைத்தகவு $\frac{3}{2}$ எனவும் உடைய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து குறுக்கச்சு y-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளதால், அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

அதிபரவளையத்தின் மையம் $C\,(h, k)$ ஆனது $F_1\, F_2$வின் நடுப்புள்ளி ஆகும்.



படம் 4.80

அதாவது, C என்பது $\left(\frac{5+5}{2}\ ,\ \frac{4-4}{2}\right) = (5, 0)$

$$F_1F_2 = 2ae = \sqrt{(5-5)^2 + (4+4)^2} = 8$$

$$ae = 4$$

$$e = \frac{3}{2} \quad \text{எனவே } a = \frac{8}{3}$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = \frac{64}{9}\left(\frac{9}{4} - 1\right)$$

$$= \frac{80}{9}$$

$$\frac{(y-0)^2}{64/9} - \frac{(x-5)^2}{80/9} = 1 \quad \text{அதாவது} \quad \frac{9y^2}{64} - \frac{9(x-5)^2}{80} = 1$$

என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

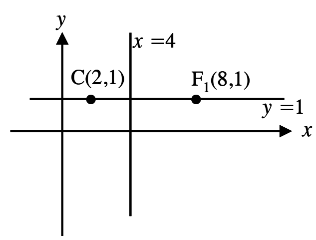
எடுத்துக்காட்டு 4.43 : மையம் (2, 1) மேலும் ஒரு குவியம் (8, 1) எனவும் இதற்கொத்த இயக்குவரை $x = 4$ எனவும் உடைய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

மையம் $C\ (h, k)$ என்பது $C\ (2, 1)$ ஆகும்.



படம் 4.81

$CF_1 = ae = 6$

(CZஐ $x = 4$க்கு குத்துக்கோடாக வரையவும்.)

மையத்திற்கும், இயக்குவரை CZக்கும் இடைப்பட்ட தூரம்

$$CZ = \frac{a}{e} = 2$$

$$\therefore\ ae \,.\, \frac{a}{e} = 6 \times 2 \Rightarrow a^2 = 12$$

$$\frac{ae}{a/e} = \frac{6}{2} \Rightarrow e^2 = 3$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \quad \therefore \quad b^2 = 12(3-1) = 24$$

$$\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$$ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.44 : குவியங்கள் (0, ± 5) மேலும் குறுக்கச்சின் நீளம் 6 எனக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

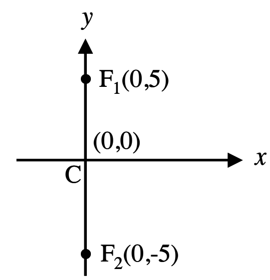
தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து குறுக்கச்சு, y-அச்சின் வழி செல்கிறது.

எனவே அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

மையம் $C(h, k)$ என்பது F_1F_2வின் நடுப்புள்ளியாகும்.



படம் 4.82

அதாவது C என்பது $\left(\frac{0+0}{2}\ ,\ \frac{5-5}{2}\right) = (0, 0)$

$$F_1F_2 = 2ae = 10$$

குறுக்கச்சின் நீளம் $= 2a = 6$

$$\Rightarrow\ a = 3 \text{ மற்றும் } e = \frac{5}{3}$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$
$$= 9\left(\frac{25}{9} - 1\right)$$
$$= 16$$

$$\therefore \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$ தேவையான சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.45 : குவியங்கள் $\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$ ஆகவும் (2, 3) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து குறுக்கச்சு y-அச்சு வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

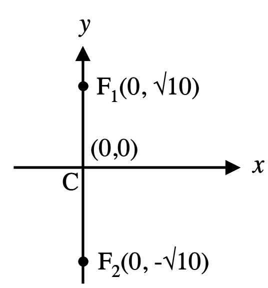
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

குவியங்கள் $(0, \pm ae) = \left(0, \pm\sqrt{10}\right)$

$$\Rightarrow\ ae = \sqrt{10}$$

மேலும் $b^2 = a^2(e^2 - 1) = a^2e^2 - a^2$

$$b^2 = 10 - a^2$$



படம் 4.83

∴ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{10 - a^2} = 1$ ஆகும்.

இது (2, 3) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்,

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{10 - a^2} = 1$$

$$\frac{9(10 - a^2) - 4a^2}{a^2\,(10 - a^2)} = 1$$

$$90 - 9a^2 - 4a^2 = 10a^2 - a^4$$

அல்லது $a^4 - 23a^2 + 90 = 0$

$$(a^2 - 18)\ (a^2 - 5) = 0$$

$a^2 = 18$ அல்லது $a^2 = 5$ ஆகும்.

$a^2 = 18$ எனில், $b^2 = 10 - 18 = -8$ என்பது பொருந்தாது.

$a^2 = 5$, $b^2 = 10 - 5 = 5$ எனில்

∴ தேவையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$ அல்லது $y^2 - x^2 = 5$

எடுத்துக்காட்டு 4.46 : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.

தீர்வு :

மையம் ஆதிப்புள்ளியாகும். குறுக்கச்சு, x-அச்சின் வழியிலும், துணையச்சு y-அச்சு வழியிலும் உள்ளன. i.e., x-அச்சு குறுக்கச்சாகும். குறுக்கச்சின் நீளம் $y = 0$ மேலும் துணையச்சு y- அச்சாகும். துணையச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.

$a^2 = 9$, $b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 3$, $\quad b = 2$

∴ குறுக்கச்சின் நீளம் $= 2a = 6$

துணையச்சின் நீளம் $= 2b = 4$

எடுத்துக்காட்டு 4.47 : $16y^2 - 9x^2 = 144$ என்ற அதிபரவளையத்தின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.

தீர்வு : $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

மையயம் ஆதிப்புள்ளியாகும். குறுக்கச்சு y-அச்சின் வழியிலும், துணையச்சு x-அச்சின் வழியிலும் உள்ளன.

$\therefore$ y-அச்சு குறுக்கச்சாகும் அதாவது குறுக்கச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.

x-அச்சு துணையச்சாகும் அதாவது துணையச்சின் சமன்பாடு $y = 0$ ஆகும்.

இங்கு $a^2 = 9, \quad b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = 4$

$\therefore$ குறுக்கச்சின் நீளம் $= 2a = 6$

துணையச்சின் நீளம் $= 2b = 8$

எடுத்துக்காட்டு 4.48 :

$9x^2 - 36x - 4y^2 - 16y + 56 = 0$ என்கிற அதிபரவளையத்தின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.

தீர்வு :

$$9(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 4y) = -56$$

$$9\{(x-2)^2 - 4\} - 4\{(y+2)^2 - 4\} = -56$$

$$9(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = 36 - 16 - 56$$

$$9(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = -36$$

$$4(y+2)^2 - 9(x-2)^2 = 36$$

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1 \text{ இங்கு } \begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 2 \end{cases}$$

குறுக்கச்சு y-வழியிலும், துணையச்சு x-அச்சு வழியிலும் உள்ளன. y-அச்சு குறுக்கச்சாகும் அல்லது $X = 0$

$\therefore$ குறுக்கச்சின் சமன்பாடு $x - 2 = 0$

X-அச்சு துணையச்சாகும் அல்லது $Y = 0$

$\therefore$ துணையச்சின் சமன்பாடு $y + 2 = 0$

இங்கு $a^2 = 9, \quad b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = 2$

$\therefore$ குறுக்கச்சின் நீளம் $= 2a = 6$

துணையச்சின் நீளம் $= 2b = 4$

எடுத்துக்காட்டு 4.49 :

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$என்ற அதிபரவளையத்தின் இயக்குவரைகள், செவ்வகலம் இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.

தீர்வு : *மையம் ஆதிப்புள்ளியில் உள்ளது. குறுக்கச்சு x-வழியில் உள்ளது.*

இயக்குவரையின் சமன்பாடுகள் $x = \pm \frac{a}{e}$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள் $x = \pm ae$

செவ்வகலத்தின் நீளம் $= \frac{2b^2}{a}$

இங்கு $a^2 = 9, \quad b^2 = 4$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

∴ *இயக்குவரையின் சமன்பாடுகள்*

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}/3} \text{ அதாவது } x = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள் $x = \pm \sqrt{13}$

செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 4.50 : $16y^2 - 9x^2 = 144$ *என்ற அதிபரவளையவத்தின் இயக்குவரைகள், செவ்வகலம் இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.*

தீர்வு : $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

இங்கு $a^2 = 9, \quad b^2 = 16 \quad e = \frac{5}{3}$

குறுக்கச்சு y-அச்சின் வழியில் உள்ளது.

∴ *இயக்குவரையின் சமன்பாடுகள்* $y = \pm \frac{a}{e}$ *அதாவது,* $y = \pm \frac{9}{5}$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள் $y = \pm ae$ *அதாவது,* $y = \pm 5$

செவ்வகலத்தின் நீளம் $= \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 4.51 : $9x^2 - 36x - 4y^2 - 16y + 56 = 0$ *என்ற அதிபரவளையத்தின் இயக்குவரை, செவ்வகலம் இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.*

தீர்வு : *கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாட்டை*

$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1 \begin{cases} Y = y + 2 \\ X = x - 2 \end{cases} \text{ என எழுதலாம்.}$$

இங்கு $a^2 = 9, \quad b^2 = 4$

$$e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$ae = \sqrt{13}\,,\ \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

குறுக்கச்சு Y-அச்சின் வழியில் உள்ளது.

$\therefore$ இயக்குவரையின் சமன்பாடுகள் $Y = \pm\frac{a}{e}$ i.e. $Y = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$

(i) $Y = \frac{9}{\sqrt{13}} \Rightarrow y + 2 = \frac{9}{\sqrt{13}} \Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{13}} - 2$

(ii) $Y = -\frac{9}{\sqrt{13}} \Rightarrow y + 2 = \frac{-9}{\sqrt{13}} \Rightarrow y = \frac{-9}{\sqrt{13}} - 2$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள் $Y = \pm ae$ i.e. $Y = \pm\sqrt{13}$

(i) $Y = \sqrt{13} \Rightarrow y + 2 = \sqrt{13} \Rightarrow y = \sqrt{13} - 2$

(ii) $Y = -\sqrt{13} \Rightarrow y + 2 = -\sqrt{13} \Rightarrow y = -\sqrt{13} - 2$

செவ்வகலத்தின் நீளம் = $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 4.52 : *நீள்வட்டம்* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$*-இன் குவியங்களும், ஒரு அதிபரவளையத்தின் குவியங்களும் ஒன்றியதாக உள்ளன. அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத்தகவு 2 எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.*

தீர்வு : நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 25,\ b^2 = 9,\qquad e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$$\therefore\ ae = 4$$

நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் $(\pm ae, 0) = (\pm 4, 0)$

அதிபரவளையத்தின் குவியங்களும், நீள்வட்டத்தின் குவியங்களும் ஒன்றியிருப்பதால், அதிபரவளையத்தின் குவியங்கள் $(\pm\ ae,\ 0) = (\pm\ 4,\ 0)$ ஆகும்.

$$\therefore\ ae = 4$$

அதிபரவளையத்தின் $e = 2$

$$a(2) = 4 \Rightarrow a = 2$$

அதிபரவளையத்திற்கு $b^2 = a^2\,(e^2 - 1)$

$$= a^2 e^2 - a^2$$
$$= 16 - 4 = 12$$

∴ தேவையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

***பண்பு* (*நிரூபணமின்றி*) :**

ஒரு புள்ளியானது அப்புள்ளிக்கும், இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் வித்தியாசம் ஒரு மாறிலியாக இருக்குமாறு நகருமானால், அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு அதிபரவளையமாக இருக்கும். மேலும் இந்த வித்தியாசம் குறுக்கச்சின் நீளத்திற்குச் சமம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.53 : ஒரு புள்ளியானது அப்புள்ளிக்கும் (4, 0) மற்றும் (–4,0) என்ற புள்ளிகளுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் வித்தியாசம் 2ஆக இருக்குமாறு நகருமானால் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

***தீர்வு*:** மேற்கண்ட பண்பினால் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு அதிபரவளையமாகும். நிலைப் புள்ளிகளை குவியங்களாகக் கொள்வோம்.

∴ F_1 (4, 0) மேலும் F_2 (– 4, 0)

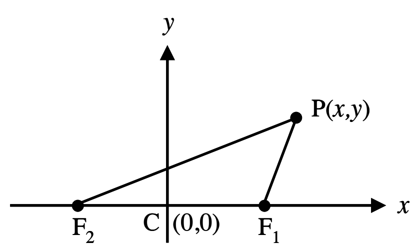
$P(x, y)$ஐ அதிபரவளையத்தின் மேலுள்ள புள்ளி என்க.

$F_1P \sim F_2P$ = குறுக்கச்சின் நீளம் = $2a = 2$

∴ $a = 1$

மையம், F_1F_2வின் நடுப்புள்ளி = (0, 0)

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.



படம் 4.84

$$F_1F_2 = 2ae = 8$$
$$ae = 4 \Rightarrow e = 4$$
$$b^2 = a^2 (e^2 - 1)$$
$$= 1(16 - 1) = 15$$

∴ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1$ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

***மாற்று முறை* :** அதிபரவளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $P(x, y)$ என்க. (4, 0) மற்றும் (– 4, 0) என்ற புள்ளிகளை F_1, F_2 என்ற நிலைப் புள்ளிகளாகக் கொள்க.

$$F_1P \sim F_2P = 2$$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2} \sim \sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2} = 2$$

சுருக்கியபின் $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{15} = 1$

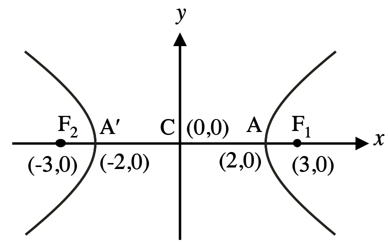
எடுத்துக்காட்டு 4.54 : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ *என்ற அதிபரவளையத்திற்கு மையத் தொலைத் தகவு, மையம், குவியங்கள் மற்றும் உச்சிகளைக் காண்க, மேலும் அதன். வளைவரையை வரைக.*

தீர்வு :

$a^2 = 4, \quad b^2 = 5$

$\Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore \quad ae = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3.$



படம் 4.85

குறுக்கச்சு x-அச்சு வழிச் செல்கிறது.

மையம்	: (0, 0)
குவியங்கள்	: $(\pm ae, 0) = (\pm 3, 0)$
உச்சிகள்	: $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

எடுத்துக்காட்டு 4.55 : $\dfrac{y^2}{6} - \dfrac{x^2}{18} = 1$ *என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத்தகவு, மையம், குவியங்கள், உச்சிகள் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வளைவரையை வரைக.*

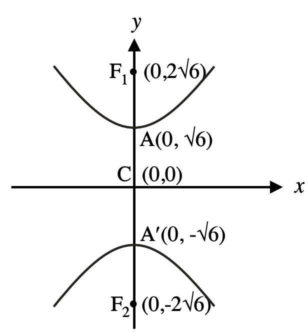
தீர்வு :

$a^2 = 6 \quad b^2 = 18$

$\Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = 2$

$\therefore ae = 2\sqrt{6}$

குறுக்கச்சு, y-அச்சுவழிச் செல்கிறது.



படம் 4.86

மையம் : (0, 0)

குவியங்கள் : $(0, \pm ae) = \left(0, \pm 2\sqrt{6}\right)$

உச்சிகள் : $(0, \pm a) = \left(0, \pm \sqrt{6}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 4.56 :

$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு மையத் தொலைத் தகவு, மையம், குவியங்கள், உச்சிகள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = 199$$

$$9\{(x-1)^2 - 1\} - 16\{(y+2)^2 - 4\} = 199$$

$$9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 199 + 9 - 64$$

$$9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$\text{i.e.,}\quad \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1 \quad \text{இங்கு} \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 2 \end{cases}$$

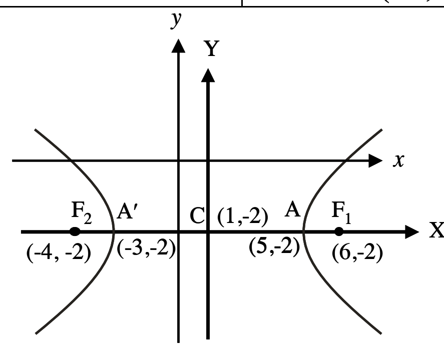
$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{4}$$

$$ae = 4 \times \frac{5}{4} = 5$$

குறுக்கச்சு X-அச்சிற்கு இணையாக உள்ளது.

	X, Yஐ பொறுத்து	x, yஐ பொறுத்து $X = x - 1, Y = y + 2$
மையம்	(0, 0)	$X = 0$; $Y = 0$ $x - 1 = 0$; $y + 2 = 0$ $x = 1$; $y = -2$ $\therefore$ $C(1, -2)$
குவியங்கள்	$(\pm ae, 0)$ is $(\pm 5, 0)$ (i) (5, 0)	(i) $X = 5$; $Y = 0$ $x - 1 = 5$; $y + 2 = 0$ $x = 6$; $y = -2$ $\therefore$ $F_1(6, -2)$
	(ii) $(-5, 0)$	(ii) $X = -5$; $Y = 0$ $x - 1 = -5$; $y + 2 = 0$ $\therefore$ $F_2(-4, -2)$

உச்சிகள்	$(\pm a, 0)$ i.e. $(\pm 4, 0)$ (i) $(4, 0)$	(i) $X = 4$; $Y = 0$ $x - 1 = 4$; $y + 2 = 0$ $\therefore$ A $(5, -2)$
	(ii) $(-4, 0)$	(ii) $X = -4$; $Y = 0$ $x - 1 = -4$; $y + 2 = 0$ $\therefore$ A′ $(-3, -2)$



படம் 4.87

எடுத்துக்காட்டு 4.57 : $9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y + 164 = 0$ *என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு, மையம், குவியங்கள், உச்சிகள் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வளைவரையை வரைக.*

தீர்வு :

$$9(x^2 + 4x) - 16(y^2 - 2y) = -164$$

$$9\{(x + 2)^2 - 4\} - 16\{(y - 1)^2 - 1\} = -164$$

$$9(x + 2)^2 - 16(y - 1)^2 = -164 + 36 - 16$$

$$16(y - 1)^2 - 9(x + 2)^2 = 144$$

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x + 2)^2}{16} = 1$$

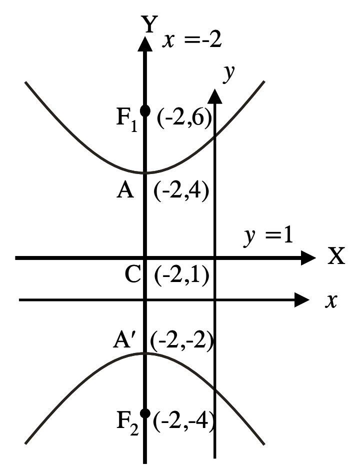
$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{16} = 1 \text{ இங்கு } \begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

$$a^2 = 9, \quad b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{3}$$

$$ae = 5$$

குறுக்கச்சு, Y-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.

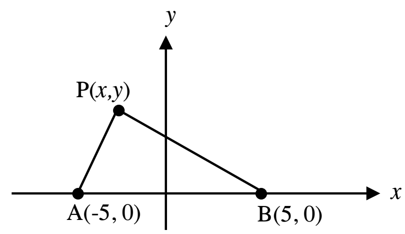
	X, Yஐ பொறுத்து	x, yஐ பொறுத்து $X = x + 2, Y = y - 1$
மையம்	(0, 0)	$X = 0 \quad ; \quad Y = 0$ $x + 2 = 0 \quad ; \quad y - 1 = 0$ $x = -2 \quad ; \quad y = 1$ $\therefore\ C(-2, 1)$
குவியங்கள்	$(0, \pm ae)$ i.e., $(0, \pm 5)$ (i) (0, 5)	(i) $X = 0 \quad ; \quad Y = 5$ $x + 2 = 0 \quad ; \quad y - 1 = 5$ $x = -2 \quad ; \quad y = 6$ $\therefore\ F_1(-2, 6)$
	(ii) $(0, -5)$	(ii) $X = 0 \quad ; \quad Y = -5$ $x + 2 = 0 \quad ; \quad y - 1 = -5$ $x = -2 \quad ; \quad y = -4$ $\therefore\ F_2(-2, -4)$
உச்சிகள்	$(0, \pm a)$ (i) (0, 3)	(i) $X = 0 \quad ; \quad Y = 3$ $x + 2 = 0 \quad ; \quad y - 1 = 3$ $\therefore\ A(-2, 4)$
	(ii) $(0, -3)$	(ii) $X = 0 \quad ; \quad Y = -3$ $x + 2 = 0 \quad ; \quad y - 1 = -3$ $x = -2 \quad ; \quad y = -2$ $\therefore\ A'(-2, -2)$



படம் 4.88

எடுத்துக்காட்டு 4.58 :

A, B என்ற இரு புள்ளிகள் 10 கி,மீ இடைவெளியில் உள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் கேட்கப்பட்ட வெடிச்சத்தத்திலிருந்து, வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் *A* என்ற புள்ளி *B* என்ற புள்ளியை விட 6 கி,மீ அருகாமையில் உள்ளது என நிர்ணயிக்கப்பட்டது. வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரைக்கு உட்பட்டது என நிரூபிக்க. அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க.



படம் 4.89

கொடுக்கப்பட்டவை :

$$PB - PA = 6$$

i.e., $$\sqrt{(x-5)^2+y^2} - \sqrt{(x+5)^2+y^2} = 6$$

சுருக்கிய பின் $$-9y^2 + 16x^2 = 144$$

$$\frac{-y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1 \text{ i.e., } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

இது ஒரு அதிபரவளையமாகும்.

பயிற்சி 4.3

(1) *பின்வரும் விவரங்களுக்குரிய அதிபரவளையங்களைக் காண்க.*

(i) *குவியம்* : (2, 3) ; *அதற்குரிய இயக்குவரை*: $x + 2y = 5$, $e = 2$

(ii) *மையம்* : (0, 0) ; *அரைக்குறுக்கச்சின் நீளம்* 5 ; $e = \frac{7}{5}$ *மேலும் துணையச்சு* x-*அச்சு வழிச் செல்கிறது.*

(iii) *மையம்* : (0, 0) ; *அரைக் குறுக்கச்சின் நீளம்* 6 ; $e = 3$, *மேலும் குறுக்கச்சு,* y-*அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.*

(iv) *மையம்* : (1, − 2) ; *குறுக்கச்சின் நீளம்* 8 ; $e = \frac{5}{4}$ *மேலும் குறுக்கச்சு* x-*அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.*

(v) *மையம்* : (2, 5) ; *இயக்குவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்* 15, *குவியங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்* 20 *மேலும் குறுக்கச்சு,* y-*அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.*

(vi) குவியங்கள் : $(0, \pm 8)$; குறுக்கச்சின் நீளம் 12

(vii) குவியங்கள் : $(\pm 3, 5)$; $e = 3$

(viii) மையம் : (1, 4) ; ஒரு குவியம் (6, 4) அதற்குரிய இயக்குவரை $x = \frac{9}{4}$.

(ix) குவியங்கள் : (6, − 1), (− 4, − 1) மேலும் (4, − 1) என்ற புள்ளிவழிச் செல்கிறது.

(2) கீழ்க்கண்ட அதிபரவளையங்களுக்கு குறுக்கச்சு, துணையச்சு இவற்றின் சமன்பாடுகளையும், நீளத்தையும் காண்க:

(i) $144x^2 - 25y^2 = 3600$ (ii) $8y^2 - 2x^2 = 16$

(iii) $16x^2 - 9y^2 + 96x + 36y - 36 = 0$

(3) கீழ்க்கண்ட அதிபரவளையங்களுக்கு இயக்குவரைகள், செவ்வகலங்கள் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள், நீளங்கள் இவற்றைக் காண்க.

(i) $4x^2 - 9y^2 = 576$ (ii) $9x^2 - 4y^2 - 36x + 32y + 8 = 0$

(4) ஒரு புள்ளியானது அப்புள்ளிக்கும் (5, 0) மற்றும் (− 5, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் வித்தியாசம் 8ஆக இருக்குமாறு நகருமானால் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை $9x^2 - 16y^2 = 144$ என நிரூபி.

(5) கீழ்க்கண்ட அதிபரவளையங்களின் மையத் தொலைத்தகவு, மையம், குவியங்கள் மேலும் உச்சிகளைக் காண்க. மேலும் வளைவரையை வரைக.

(i) $25x^2 - 16y^2 = 400$ (ii) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

(iii) $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$ (iv) $x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 18 = 0$

4.6 கூம்பு வளைவுகளின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் (Parametric form of Conics) :

வளைவரை	துணையலகுச் சமன்பாடு	துணையலகு	துணையலகின் வீச்சு	வளைவரையின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி
பரவளையம்	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' அல்லது $(at^2, 2at)$
நீள்வட்டம்	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' அல்லது $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
அதி பரவளையம்	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' அல்லது $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

குறிப்பு : *நீள்வட்டத்திற்கு துணையலகுச் சமன்பாடு*

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, y = \frac{b.2t}{1+t^2}, -\infty < t < \infty \text{ ஆகும்.}$$

இந்த அமைப்பு $x = a \cos\theta$ *மற்றும்* $y = b \sin \theta$*வில்* $\tan \frac{\theta}{2} = t$ *என பொருந்துவதால் கிடைக்கிறது.*

எனவே, கூம்பின் வெட்டு முகங்களுக்கு இரு அமைப்புகள் கார்டீசியன் அமைப்பு, துணையலகு அமைப்பு ஆகியவை உள்ளன. இனி கூம்பு வளைவுகளுக்கு நாண், தொடுகோடு, செங்கோடு இவைகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம்.

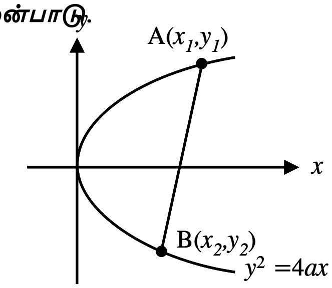
4.7 நாண்கள், தொடுகோடுகள் மற்றும் செங்கோடுகள் (Chords, tangents and normals) :

மேற்குறிப்பிட்டவற்றின் சமன்பாடுகளை, கூம்வு வளைவுகளுக்கு இரு வடிவங்களிலும் தருவிக்கலாம்.

4,7.1. கார்டீசியன் அமைப்பு

(i) *பரவளையம்* (Parabola) :

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் மேலுள்ள $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு.



படம் 4.90

(x_1, y_1) *மேலும்* (x_2, y_2) *என்ற புள்ளிகள் பரவளையத்தின் மேல் அமைந்துள்ளன என்க.*

$$y_1^2 = 4ax_1, y_2^2 = 4ax_2$$

$$y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}$$

நாண் AB*இன் சாய்வு* $= \frac{4a}{y_1 + y_2}$

சாய்வு (m), *புள்ளி* (x_1, y_1) *எனில், நாணின் சமன்பாடு*

$$(y - y_1) = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

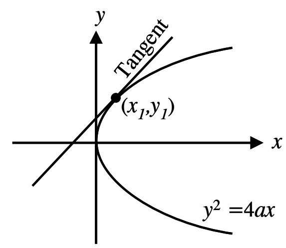
நாண், (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடாக மாற (x_2, y_2) என்ற புள்ளி (x_1, y_1) உடன் இணைய வேண்டும். $\therefore (x_1, y_1)$இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெற, நாணின் சமன்பாட்டில் $x_2 = x_1$ எனவும் $y_2 = y_1$ எனவும் பிரதியிடுக. $\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$(y - y_1) = \frac{4a}{y_1 + y_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad yy_1 = 2a(x + x_1)$$

$$(y_1^2 = 4ax_1)$$

எனவே பரவளையத்தில் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$



படம் 4.91

செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை செங்குத்துத் தன்மையைப் பயன்படுத்திக் காணுதல்:

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

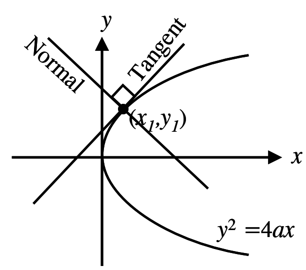
$$2ax - y_1y + 2ax_1 = 0$$

$\therefore$ செங்கோட்டின் வடிவம்

$y_1x + 2ay = k$ ஆகும்

இது (x_1, y_1) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்

$\therefore \; k = x_1y_1 + 2ay_1$



படம் 4.92

பரவளையத்தின் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y_1x + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1$

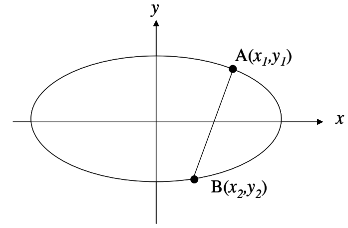
(ii) நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ மேலமைந்த இரு புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன.

எனவே, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \; \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$

சுருக்கிய பின் சாய்வு

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$$



படம் 4.93

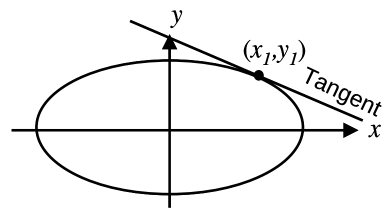
$\therefore$ நாணின் சமன்பாடு $(y - y_1) = \dfrac{-b^2 (x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} (x - x_1)$

தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெற $x_2 = x_1$ மற்றும் $y_2 = y_1$ என நாணின் சமன்பாட்டில் பிரதியீடு செய்யவும்

$\therefore (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - y_1) = \frac{-b^2 (x_1 + x_1)}{a^2 (y_1 + y_1)} (x - x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$



படம் 4.94

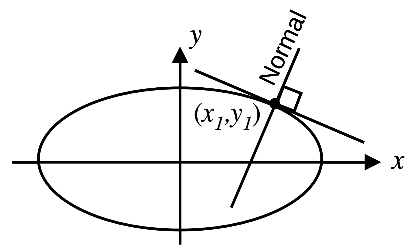
செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெற செங்குத்துத்தன்மையை பயன்படுத்தவும்

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$x_1b^2x + y_1a^2y - a^2b^2 = 0$$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y_1a^2x - x_1b^2y = k$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். ஆனால் இது (x_1, y_1) என்ற புள்ளிவழிச் செல்கிறது.

$$\therefore k = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1$$



படம் 4.95

$\therefore \quad y_1a^2x - x_1b^2y = (a^2 - b^2)\, x_1y_1$ அல்லது $\dfrac{a^2x}{x_1} - \dfrac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

(iii) அதிபரவளையம் (Hyperbola) :

நீள்வட்டத்திற்கு வருவித்தது போல, அதிபரவளையத்தின் நாணின் சமன்பாடு $y - y_1 = \dfrac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} (x - x_1)$ ஆகும்.

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ மேலும் (x_1, y_1)இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$ ஆகும்.

குறிப்பு : நீள் வட்டத்திற்குக் பெறப்பட்ட முடிவுகளில் b^2க்குப் பதிலாக $-b^2$ஐ பிரதியிட அதிபரவளையத்திற்குரிய முடிவுகளைப் பெறலாம்.

4.7.2. துணையலகு அமைப்பு (Parametric form) :

நாண், தொடுகோடு மேலும் செங்கோடுகளின் துணையலகுச் சமன்பாடுகளைக் காண, (x_1, y_1)க்கு ஒத்த துணையலகுகளைப் பொருத்த வேண்டும்.

(i) பரவளையம்:

பரவளையத்தின் மீதுள்ள (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$

$(at_1^2, 2at_1)$ மற்றும் $(at_2^2, 2at_2)$ அல்லது 't_1' மற்றும் 't_2' என்ற பரவளையத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$y - 2at_1 = \frac{4a}{2at_1 + 2at_2}(x - at_1^2)$$

$$\text{i.e.} \quad y(t_1 + t_2) = 2x + 2a\, t_1t_2$$

't' என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெற $t_1 = t_2 = t$ என்று நாணின் சமன்பாட்டில் பிரதியீடு செய்யவும்.

$$y(2t) = 2x + 2at^2$$

$$\text{i.e.} \quad yt = x + at^2$$

மாற்று முறை : $y^2 = 4ax$இல் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டில் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\therefore (at^2, 2at)$இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y(2at) = 2a\,(x + at^2)$$

$$\text{i.e.,} \quad yt = x + at^2$$

செங்குத்துத் தன்மையைப் பயன்படுத்த, 't'இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y + tx = 2at + at^3$ஆகும்.

இதுபோலவே, நீள்வட்டம் மற்றும் அதிபரவளையம் ஆகியவற்றிற்கு நாண், தொடுகோடு, செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

குறிப்பு : x^2ஐ xx_1என்றும், y^2ஐ yy_1என்றும், xyஐ $\frac{1}{2}(xy_1 + x_1y)$ என்றும், xஐ $\frac{1}{2}(x + x_1)$ என்றும் yஐ $\frac{1}{2}(y + y_1)$ என்றும் வளைவரையின் சமன்பாட்டில் எழுத தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

கூம்பின் வெட்டுமுக வளைவரைகளுக்கு $y = mx + c$ தொடுகோடாக அமைய நிபந்தனை :

(1) *பரவளையம்*Parabola :

$y^2 = 4ax$ க்குத் தொடுகோடு $y = mx + c$ என்க. (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$ என்பது தெரிந்ததே.

∴ மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே நெடுக்கோட்டைக் குறிக்கின்றன. எனவே ஒத்த கெழுக்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும்.

$$\therefore\ 2ax - y_1y + 2ax_1 = 0$$

$$mx - y + c = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2a}{m} = \frac{-y_1}{-1} = \frac{2ax_1}{c}$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = \frac{c}{m}\ ,\ \ y_1 = \frac{2a}{m}$$

புள்ளி (x_1, y_1) பரவளையத்தில் மேல் அமைந்திருப்பதால்

$$y_1{}^2 = 4ax_1 \Rightarrow \frac{4a^2}{m^2} = 4a\ .\ \frac{c}{m}$$

$$\text{i.e. ,}\ c = \frac{a}{m}$$

எனவே $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்குப் பின்வரும் மூன்று முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

(1) தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை $c = \frac{a}{m}$

(2) தொடு புள்ளி $\left(\frac{c}{m}\ ,\ \frac{2a}{m}\right)$ (i.e.). $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

(3) எந்த ஒரு தொடுகோட்டின் சமன்பாடும் $y = mx + \frac{a}{m}$ என்கிற அமைப்பில் இருக்கும்.

குறிப்பு : தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை கார்ட்டிசியன் அமைப்புக்குப் பதில் துணையலகு அமைப்பில் எடுத்துக் கொண்டாலும் இதே முடிவுகளைப் பெறமுடியும். இதுபோலவே மற்ற கூம்பு வளைவுகளுக்கும் இதுபோன்ற முடிவுகளைப் பெற முடியும்.

நீள்வட்டத்தைப் பொறுத்த முடிவுகள் :

(i) $y = mx + c$ ஆனது நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$க்கு தொடுகோடாக அமைய நிபந்தனை $c^2 = a^2m^2 + b^2$ ஆகும்.

(ii) தொடுபுள்ளி $\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$, இங்கு $c^2 = a^2m^2 + b^2$

(iii) எந்த ஒரு தொடுகோடும் $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

குறிப்பு : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ இல் $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ அல்லது $y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுதான் சரியானதே தவிர, இரண்டையுமே எடுத்துக் கொள்ள முடியாது.

அதிபரவளையத்தைப் பொறுத்த முடிவுகள் :

(i) $y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$க்கு தொடுகோடாக அமைய நிபந்தனை $c^2 = a^2m^2 - b^2$ ஆகும்.

(ii) தொடு புள்ளி $\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$, இங்கு $c^2 = a^2m^2 - b^2$

(iii) எந்த ஒரு தொடுகோடும் $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

குறிப்பு : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$இல் $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ அல்லது $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுதான் சரியானதே தவிர, இரண்டையுமே எடுத்துக் கொள்ள முடியாது.

4.7.3 (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுநாணின் சமன்பாடு

(i) பரவளையம் $y^2 = 4ax$ (ii) நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (iii) அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகியவற்றிற்கு வரையப்படும் நெடுகோடுகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடுகள்

தீர்வு :

$Q(x_2, y_2)$வில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $yy_2 = 2a(x + x_2)$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்வதால்

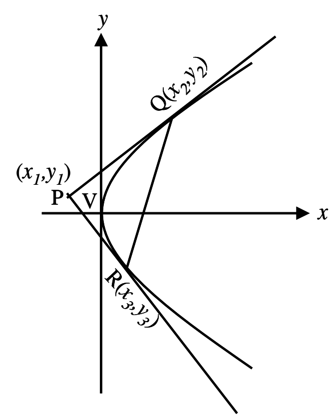
$y_1y_2 = 2a\ (x_1 + x_2)$ … (1)

$R(x_3, y_3)$இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $yy_3 = 2a(x + x_3)$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்வதால்

$\therefore\ y_1y_3 = 2a(x_1 + x_3)$ … (2)

முடிவுகள் (1) மற்றும் (2)இலிருந்து $Q(x_2, y_2)$ மற்றும்$R(x_3, y_3)$ புள்ளிகள் $yy_1 = 2a(x + x_1)$ என்ற நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன.



படம் *4.96*

$\therefore$ தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் QRஇன் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ஆகும்.

இதுபோலவே நீள்வட்டத்தின் தொடுநாணின் சமன்பாடு

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ எனவும் அதிபரவளையத்தின் தொடுநாணின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ எனவும் அடையலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.59 : $y^2 = 5x$ என்ற பரவளையத்திற்கு (5, 13) புள்ளியில் இருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. மேலும் தொடுபுள்ளிகளையும் காண்க.

தீர்வு :

பரவளையின் சமன்பாடு $y^2 = 5x$ இங்கு $4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + \frac{a}{m}$ i.e., $y = mx + \frac{5}{4m}$ … (1)

இது (5, 13) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்

$$13 = 5m + \frac{5}{4m}$$

$$\therefore 20m^2 - 52m + 5 = 0$$

$$(10m - 1)\ (2m - 5) = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{1}{10} \text{ அல்லது } m = \frac{5}{2}$$

இந்த mஇன் மதிப்புகளுக்கு தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் $2y = 5x + 1$, $10y = x + 125$ ஆகும்.

தொடு புள்ளிகள் $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$, $a = \frac{5}{4}$ $m = \frac{5}{2}$, $\frac{1}{10}$ என்பதால் தொடு புள்ளிகள் $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$, $(125, 25)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.60 : $t = 1$இல் $y^2 = 12x$ என்ற பரவளையத்திற்கு தொடு கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : பரவளையின் சமன்பாடு $y^2 = 12x$.

இங்கு $4a = 12$, $a = 3$

't' என்பது $(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறது.

$\therefore$ $t = 1$ எனில் புள்ளி $(3, 6)$ ஆகும்.

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து பரவளையம் $y^2 = 12x$இன் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு. $yy_1 = 12\,\frac{(x + x_1)}{2}$

இதில் $(3, 6)$இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y(6) = \frac{12\,(x + 3)}{2}$

(அ.து.), $x - y + 3 = 0$

மாற்று முறை :

't'இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $yt = x + at^2$

இங்கு $4a = 12 \Rightarrow a = 3$

மேலும் $t = 1$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = x + 3$

$$x - y + 3 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4.61 :

$x^2 + x - 2y + 2 = 0$ என்ற பரவளையத்திற்கு $(1, 2)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

பரவளையின் சமன்பாடு $x^2 + x - 2y + 2 = 0$

(x_1, y_1)இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1 + \frac{x + x_1}{2} - 2\,\frac{(y + y_1)}{2} + 2 = 0, \Rightarrow x(1) + \frac{x + 1}{2} - 2\,\frac{(y + 2)}{2} + 2 = 0$$

சுருக்கிய பின் $3x - 2y + 1 = 0$ ஆகும்.

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $2x + 3y + k = 0$

இது (1, 2) வழிச் செல்வதால்

$$\therefore\ 2 + 6 + k = 0 \quad \therefore\ k = -8$$

∴ செங்கோட்டின் சமன்பாடு $2x + 3y - 8 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 4.62 : $2x^2 + 7y^2 = 14$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு (5, 2) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $2x^2 + 7y^2 = 14$

$$\text{அதாவது}\quad \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \text{ என்க,}$$

$$\text{இங்கு } a^2 = 7,\ \ b^2 = 2 \text{ எனில்,}$$

$$\therefore\ y = mx + \sqrt{7m^2 + 2}$$

இது (5, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$2 = 5m + \sqrt{7m^2 + 2}$$

$$\text{அதாவது}\quad 2 - 5m = \sqrt{7m^2 + 2}$$

$$\therefore\ (2 - 5m)^2 = 7m^2 + 2$$

$$4 + 25m^2 - 20m = 7m^2 + 2$$

$$18m^2 - 20m + 2 = 0$$

$$9m^2 - 10m + 1 = 0$$

$$\therefore\ (9m - 1)\ (m - 1) = 0$$

$$\therefore\ m = 1 \quad \text{அல்லது}\ \ m = \frac{1}{9}$$

சாய்வு - புள்ளி வடிவத்தில், தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு காணல்

(i) $m = 1$ எனில், $y - 2 = 1(x - 5)$ i.e., $x - y - 3 = 0$

(ii) $m = 1/9$ எனில்

$y - 2 = \frac{1}{9}(x - 5)$, அதாவது, $x - 9y + 13 = 0$

$\therefore$ தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$x - y - 3 = 0$, $x - 9y + 13 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.63 : $2x^2 + 5y^2 = 20$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு (2, 4) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

புள்ளி (x_1, y_1)இலிருந்து $2x^2 + 5y^2 - 20 = 0$க்கு தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன்பாடு, $2xx_1 + 5yy_1 - 20 = 0$

(2, 4)இலிருந்து தேவையான சமன்பாடு $2x(2) + 5y(4) - 20 = 0$

அதாவது $x + 5y - 5 = 0$

பயிற்சி 4.4

(1) தொடுகோடு, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(i) பரவளையம் $y^2 = 12x$ க்கு (3, – 6) புள்ளியில்

(ii) பரவளையம் $x^2 = 9y$க்கு (– 3, 1) புள்ளியில்

(iii) பரவளையம் $x^2 + 2x - 4y + 4 = 0$க்கு (0, 1) புள்ளியில்

(iv) நீள் வட்டம் $2x^2 + 3y^2 = 6$க்கு $(\sqrt{3}, 0)$என்ற புள்ளியில்

(v) அதிபரவளையம் $9x^2 - 5y^2 = 31$க்கு (2, – 1) என்ற புள்ளியில்

(2) தொடுகோடு, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(i) பரவளையம் $y^2 = 8x$க்கு $t = \frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியில்

(ii) நீள் வட்டம் $x^2 + 4y^2 = 32$க்கு $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியில்

(iii) நீள் வட்டம் $16x^2 + 25y^2 = 400$க்கு $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ என்ற புள்ளியில்

(iv) அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$க்கு $\theta = \frac{\pi}{6}$ என்ற புள்ளியில்

(3) தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $3x - 2y + 5 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டுக்கு இணையாக $y^2 = 6x$ என்ற பரவளையத்தின் தொடுகோடு.

(ii) $3x - y + 8 = 0$ என்ற நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையத்தின் தொடுகோடு.

(iii) $x + y + 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு

(iv) $10x - 3y + 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக $4x^2 - y^2 = 64$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொடுகோடு

(4) வரையத்தக்க இரு தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $(2, -3)$லிருந்து $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கு

(ii) $(1, 3)$லிருந்து $4x^2 + 9y^2 = 36$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு

(iii) $(1, 2)$லிருந்து $2x^2 - 3y^2 = 6$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு

(5) $5x + 12y = 9$ என்ற நேர்க்கோடு அதிபரவளையம் $x^2 - 9y^2 = 9$-ஐத் தொடுகிறது என நிரூபிக்க. மேலும் தொடும் புள்ளியையும் காண்க.

(6) $x - y + 4 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு நீள்வட்டம் $x^2 + 3y^2 = 12$க்கு தொடுகோடாக உள்ளது என நிரூபிக்க. மேலும் தொடும் புள்ளியையும் காண்க.

(7) தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $(-3, 1)$லிருந்து $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்திற்கு

(ii) $(2, 4)$லிருந்து $2x^2 + 5y^2 = 20$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு

(iii) $(5, 3)$லிருந்து $4x^2 - 6y^2 = 24$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு

சில முடிவுகள் [நிரூபணமின்றி]

(1) தளத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு தொடுகோடுகள் முறையே (i) பரவளையம் (ii) நீள் வட்டம் (iii) அதிபரவளையம் ஆகியவற்றிற்கு வரைய முடியும்.

(2) தளத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து

(a) பரவளையத்திற்கு 3 செங்கோடுகளும்

(b) நீள்வட்டம் மற்றும் அதிபரவளையத்திற்கு 4 செங்கோடுகளும் வரையமுடியும்.

(3) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு வரையப்படும் தொடுநாணின் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுநாணின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு வரையப்படும்

தொடுநாணின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(4) இயக்குவரையின் எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் (i) பரவளையத்திற்கு குவியம் வழியாகவும் (ii) நீள்வட்டத்திற்கும். அதிபரவளையத்திற்கும் அதன் ஒத்த குவியம் வழியாகவும் செல்லும்

(5) $lx + my + n = 0$ என்ற நேர்க்கோடு

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய நிபந்தனை $am^2 = ln$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$ ஆகும்.

(6) $lx + my + n = 0$ என்ற நேர்க்கோடு

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு செங்கோடாக அமைய நிபந்தனை $al^3 + 2alm^2 + m^2n = 0$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{n^2}$

(7) ஒரு குவியத்திலிருந்து ஒரு தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் நியமப்பாதை

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு $x = 0$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $x^2 + y^2 = a^2$ (துணை வட்டம்)

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $x^2 + y^2 = a^2$ (துணை வட்டம்) ஆகும்.

(8) செங்குத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியின் நியமப்பாதை

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு $x = -a$ (இயக்குவரை)

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (இயக்கு வட்டம்)

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ (இயக்கு வட்டம்) ஆகும்.

(9) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு 't_1', 't_2' ஆகிய புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி $[at_1t_2, a(t_1 + t_2)]$

(10) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு 't_1' என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு, பரவளையத்தை மீண்டும் 't_2' என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமெனில் $t_2 = -\left(t_1 + \frac{2}{t_1}\right)$

(11) பரவளையம் $y^2 = 4ax$-ன் குவிநாணின் இறுதிப் புள்ளிகள் 't_1' மற்றும் 't_2' எனில் $t_1t_2 = -1$

குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்டுள்ள முடிவுகளுக்கு நிரூபணம் வேண்டுமாயின் தீர்வுப் புத்தகத்தைப் பார்க்கவும்.

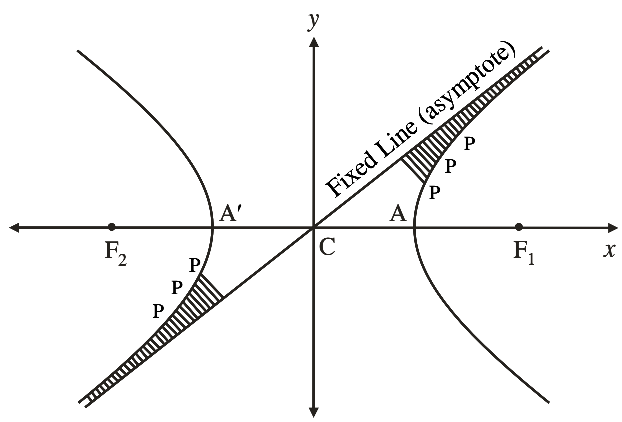
4.8 தொலைத் தொடுகோடுகள் (Asymptotes) :

$y = f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரையை எடுத்துக் கொள்க. வளைவரையின் மேலுள்ளP என்ற புள்ளி ஆதியிலிருந்து மேலும் மேலும் விலகிச் செல்லும்போது நிலைக்கோட்டிலிருந்து புள்ளி Pக்குள்ள தூரம் பூச்சியத்தை நோக்கிச் செல்ல வாய்ப்பு உண்டு. இத்தகைய நிலைக்கோடு தொலைத் தொடு கோடாகும். திறந்த வளைவரையில்தான் இது சாத்தியமாகும். அதிபரவளை ஒரு திறந்த வளைவரையாதலால், $x \to +\infty$ மற்றும் $x \to -\infty$ ஆகும் பொழுது $y \to \pm\infty$ ஆகும்.

$\therefore$ அதிபரவளையத்திற்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டு.

வரையறை :

ஒரு வளைவரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி கந்தழியில் இருக்குமானால் அந்த தொடுகோடு வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடாகும். குறிப்பாக, தொலைத் தொடுகோடு $+\infty$ மற்றும் $-\infty$இல் வளைவரையைத் தொடுகிறது.



படம் 4.97

அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

நேர்க்கோடு $y = mx + c$ஐ தொலைத் தொடுகோடு என்க. தொலைத் தொடுகோடு, அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டறிய, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$யும் $y = mx + c$யும் தீர்க்க வேண்டும். $\therefore\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{2mc}{b^2}x - \left(\frac{c^2}{b^2} + 1\right) = 0$$

இரு தொடும் புள்ளிகளும் கந்தழியில் உள்ளன. ∴ அதாவது மூலங்கள் கந்தழியாக இருக்க வேண்டும்.

∴ x^2இன் கெழு, xஇன் கெழு பூச்சியம் ஆக வேண்டும்.

$$\therefore\ \frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0 \ \text{ மற்றும் } \ \frac{-2mc}{b^2} = 0 \quad \text{i.e., } \ m = \pm\frac{b}{a} \ \text{ மற்றும் } \ c = 0$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

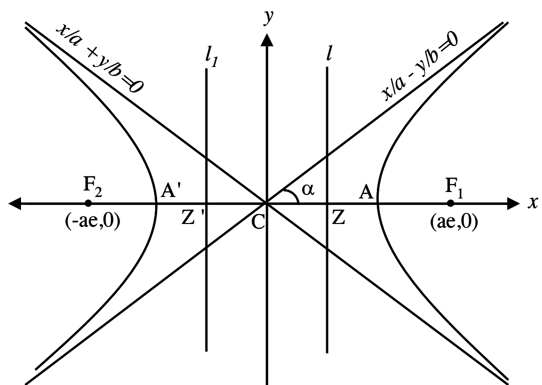
∴ இரு தொலைத் தொடுகோடுகள் உள்ளன. அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$y = \frac{b}{a}x \ \text{ மற்றும் } \ y = \frac{-b}{a}x \ \text{ ஆகும்.}$$

i.e. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ மற்றும் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = 0 \text{ i.e. } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$



படம் 4.98

தொலைத் தொடுகோடுகள் தொடர்பான சில முடிவுகள் :

(1) தொலைத் தொடுகோடுகள் அதிபரவளையத்தின் மையம் $C(0, 0)$ வழிச் செல்கின்றன.

(2) தொலைத் தொடுகோடுகளின் சாய்வுகள் $\frac{b}{a}$ மேலும் $-\frac{b}{a}$ ஆகும். அதாவது, குறுக்கச்சு மற்றும் துணையச்சு தொலைத்தொடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை இருசமக்கூறிடும்.

(3) தொலைத் தொடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் 2α எனில், $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$-ன் சாய்வு $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ ஆகும்.

$\therefore$ தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $2\alpha = 2\tan^{-1}\frac{b}{a}$

(4) $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ என தெரிந்ததே

$$\sec^2\alpha = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = e^2$$

$$\Rightarrow \sec\alpha = e \Rightarrow \alpha = \sec^{-1}e$$

$\therefore$ தொலைத் தொடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $= 2\alpha = 2\sec^{-1}e$

முக்கியக் குறிப்பு :

தொலைத் தொடுகோடுகள் நேர்க்கோடுகளாக இருப்பினும், இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் விரிகோணமாக இருப்பின அதையே தொலைத் தொடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒத்த குறுங்கோணத்தை எடுக்கக் கூடாது.

(5) அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடும், தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடும் மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகின்றன.

(6) $l_1 = 0$ மேலும் $l_2 = 0$ தொலைத் தொடுகோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் எனில், தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு $l_1\, l_2 = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ ஒத்த அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $l_1 l_2 = k$ (k ஒரு மாறிலி) kஇன் மதிப்பை அறிய அதிபரவளையத்தின் மீது ஒரு புள்ளி தேவைப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.64 : $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு: தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரு மாறிலியால் வேறுபடும்.

$3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + k = 0$ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடாகும்.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5xy - 2y^2 &= 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2 \\ &= 3x\,(x - 2y) + y(x - 2y) \\ &= (3x + y)\,(x - 2y) \end{aligned}$$

$\therefore$ தனிச்சமன்பாடுகள் $3x + y + l = 0, \quad x - 2y + m = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (3x + y + l)\ (x - 2y + m) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + k$$

x, y மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை ஒப்பிட,

$$l + 3m = 17 \qquad \dots (1)$$
$$-2l + m = 1 \qquad \dots (2)$$
$$l\,m = k$$

(1) மற்றும் (2)ஐ தீர்க்க, $l = 2$, $m = 5$ மேலும் $k = 10$ ஆகும்.

$\therefore$ தொலைத் தொடுகோடுகளின் தனிச்சமன்பாடுகள் $3x + y + 2 = 0$ மேலும் $x - 2y + 5 = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு

$3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0$

குறிப்பு : மேலே கூறப்பட்ட அதிபரவளையம் ஒரு திட்ட அதிபரவளையம் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 4.65 :

$4x + 3y - 7 = 0$ மற்றும் $x - 2y = 1$ என்பவற்றைத் தொலைத் தொடுகோடுகளாகவும், (2, 3) என்ற புள்ளிவழியாகச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தொலைத் தொடுகோடுகளின் தனிச்சமன்பாடுகள்

$4x + 3y - 7 = 0$ மற்றும் $x - 2y - 1 = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $(4x + 3y - 7)(x - 2y - 1) = 0$ என்பது தொலைத்தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடாகும்.

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடும், அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடும் ஒரு மாறிலியால் வேறுபடும்.

$(4x + 3y - 7)(x - 2y - 1) + k = 0$ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடாகும்.

இது (2, 3) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்

$$(8 + 9 - 7)(2 - 6 - 1) + k = 0 \quad \therefore \ k = 50$$

$$(4x + 3y - 7)(x - 2y - 1) + 50 = 0.$$

இதுவே அதிபவளையத்தின் சமன்பாடாகும். இச்சமன்பாட்டை

$$4x^2 - 5xy - 6y^2 - 11x + 11y + 57 = 0$$ எனவும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.66: $3x^2 - y^2 - 12x - 6y - 9 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$3x^2 - y^2 - 12x - 6y - 9 = 0$$

$$3(x^2 - 4x) - (y^2 + 6y) = 9$$

$$3\,\{(x - 2)^2 - 4\} - \{(y + 3)^2 - 9\} = 9$$

$$3(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{12} = 1$$

இங்கு $a = 2,\ b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$2\alpha = 2\tan^{-1}\frac{b}{a} = 2\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2} = 2\tan^{-1}\sqrt{3} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

மாற்று முறை :

$a^2 = 4, \quad b^2 = 12$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{12}{4}} = 2$$

தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$2\alpha = 2\sec^{-1}2 = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.67: $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோளின் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு: தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரு மாறிலியால் வேறுபடும்.

∴ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு

$$3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + k = 0$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5xy - 2y^2 &= 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2 \\ &= 3x(x - 2y) + y(x - 2y) \\ &= (x - 2y)(3x + y) \end{aligned}$$

∴ தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $x - 2y + l = 0$ மற்றும் $3x + y + m = 0$ ஆகும்.

இந்த நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1, m_2 எனில் $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -3$

∴ நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{1/2 - (-3)}{1 + 1/2\,(-3)}\right| = 7$$

$$\theta = \tan^{-1}(7)$$

மாற்று முறை : தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடும், இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடும் ஒன்றேயாகும்.

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ உடன் ஒப்பிடுகையில்

$a = 3, \; b = -2, \; 2h = -5$

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{\frac{25}{4}+6}}{3-2}\right|$$

$$= \left|\frac{2\times 7}{2}\right| = 7$$

$$\theta = \tan^{-1}(7)$$

குறிப்பு :

மேலே கொடுக்கப்பட்ட அதிபரவளையம் திட்டவடிவில் இல்லாததால், தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் விரிகோணமா அல்லது குறுங்கோணமா என்பதைக் கூறுவது எளிதல்ல. எனவே மேற்கூறிய வழியில் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் குறுங்கோணமாகவே அமையும்.

$\therefore$ *அதிபரவளையம் திட்ட வடிவில் இருப்பின், தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம்* $2\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ *அல்லது* $2\sec^{-1}e$ *என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.*

எடுத்துக்காட்டு 4.68 : *அதிபரவளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் செங்குத்துத் தூரங்களின் பெருக்குத் தொகை ஒரு மாறிலி என்றும் அதன் மதிப்பு* $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ *எனவும் காட்டுக.*

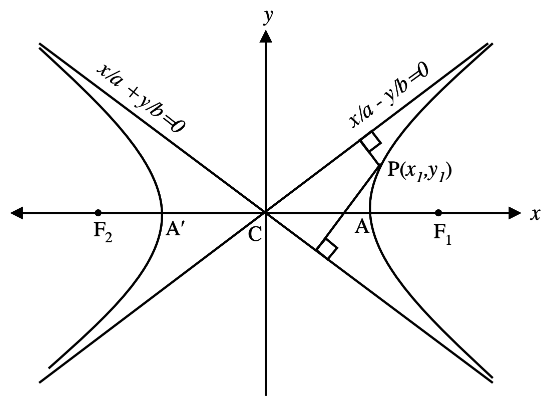
தீர்வு :

அதிபரவளையம் $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$*இன் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை*

$P(x_1, y_1)$ *என்க.* $\quad\therefore \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \ldots (1)$

$(x_1,\ y_1)$*இலிருந்து,* $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ *என்ற தொலைத் தொடு கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்*

$\dfrac{\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{y_1}{b}}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}$ *ஆகும். மேலும்* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$*க்கு* $\dfrac{\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{y_1}{b}}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}$ *ஆகும்.*



படம் 4.99

∴ செங்குத்துத் தூரங்களின் பெருக்கற் பலன்

$$= \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$= \frac{\frac{x_1^{\ 2}}{a^2} - \frac{y_1^{\ 2}}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{b^2 + a^2}{a^2\, b^2}} \quad \text{((1)இலிருந்து)}$$

$$= \frac{a^2\, b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{(ஒரு மாறிலியாகும்)}$$

பயிற்சி 4.5

(1) பின்வரும் அதிபரவளையங்களுக்குத் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $36x^2 - 25y^2 = 900$ (ii) $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

(2) பின்வரும் அதிபரவளையங்களின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(i) தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x + 3y - 8 = 0$ மற்றும் $3x - 2y + 1 = 0$ மேலும் (5, 3) என்ற புள்ளி வழியாக அதிபரவளையம் செல்கிறது.

(ii) அதிபரவளையத்தின் மையம் (2, 4). மேலும் (2, 0) வழியே செல்கிறது. இதன் தொலைத் தொடுகோடுகள் $x + 2y - 12 = 0$ மற்றும் $x - 2y + 8 = 0$ ஆகியவற்றிற்கு இணையாக இருக்கின்றன.

(3) பின்வரும் அதிபரவளையங்களின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடையே அமையும் கோணத்தைக் காண்க.

(i) $24x^2 - 8y^2 = 27$ (ii) $9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$

(iii) $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$

4.9 செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular hyperbola) :

வரையறை :

ஒரு அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமெனில் அது செவ்வக அதிபரவளையம் எனப்படும்.

தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $2\tan^{-1}\frac{b}{a}$ ஆகும். ஆனால் செவ்வக அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $90°$ ஆகும்.

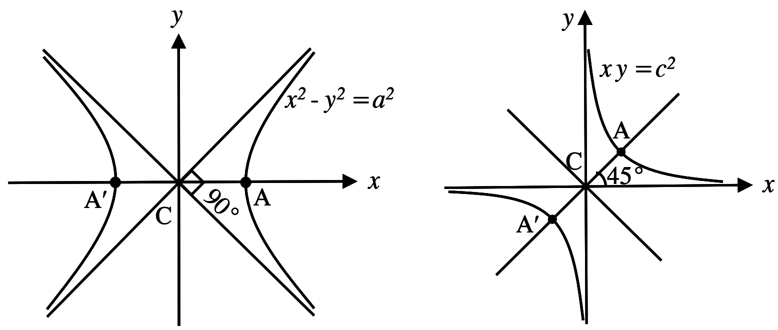
$$\therefore 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 90° \;\therefore\; \frac{b}{a} = \tan 45° \;\Rightarrow\; a = b.$$

$\therefore$ அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$இல் $a = b$ எனப் பிரதியிட, செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 - y^2 = a^2$ என அடைகிறோம். எனவே தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு $x^2 - y^2 = 0$ ஆகும். தனிச் சமன்பாடுகள் $x - y = 0$ மற்றும் $x + y = 0$. அதாவது, $x = y$ மற்றும் $x = -y$. குறுக்கச்சு $y = 0$, துணையச்சு $x = 0$ ஆகும்.

செவ்வக அதிபரவளையம் $x^2 - y^2 = a^2$இன் எல்லா முடிவுகளும், $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் முடிவுகளில் $a = b$ எனப் பிரதியிடக் கிடைக்கும்

இவ்வகை செவ்வக அதிபரவளையம் திட்ட அமைப்பில் இல்லை என்பதனைத் தெரிந்து கொள்க. திட்ட அமைப்பில் இருக்க வேண்டுமாயின் அச்சுகள் தொலைத் தொடுகோடுகளாக அமைய வேண்டும்.

செவ்வக அதிபரவளையம் $x^2 - y^2 = a^2$ஐ ஆதியைப் பொறுத்து $45°$ கடிகாரத்தின் எதிர்த்திசையில் சுழற்றும்பொழுது செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடு $xy = c^2$ கிடைக்கிறது.

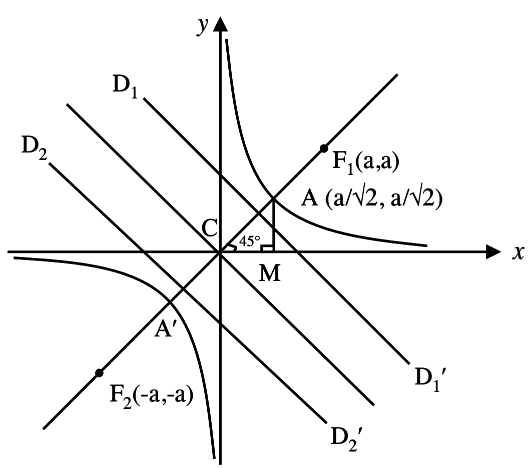


படம் 4.100

4.9.1 செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடு

(Standard equation of a rectangular hyperbola) :

திட்ட வடிவிலுள்ள செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு அச்சுக்களே தொலைத் தொடுகோடுகளாக அமையும். அச்சுக்களே தொலைத் தொடுகோடுகளாக அமைவதால் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் $x = 0$ மற்றும் $y = 0$ ஆகும். $\therefore$ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு $xy = 0$. $\therefore$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடு $xy = k$ என்ற வடிவில் இருக்கும். kஐ கண்டுபிடிக்க, செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மீது ஒரு புள்ளி தேவை.



படம் 4.101

தொலைத் தொடு கோடுகள் C என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். குறுக்கச்சு நீளம் $AA' = 2a$ என்க. AMஐ x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையவும்.

$\angle ACM = 45°$. $CM = a \cos 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $AM = a \sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Aஇன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ ஆகும். இந்தப் புள்ளி செவ்வக அதிபரவளையம் $xy = k$யில் அமைகிறது $\therefore$ $k = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$ அல்லது $k = \frac{a^2}{2}$

எனவே, செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாடு $xy = \frac{a^2}{2}$ அல்லது $xy = c^2$ இங்கு $c^2 = \frac{a^2}{2}$.

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$ என்ற தொடர்பிலிருந்து, அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவை அறிய முடியும். செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு $a = b$ $\therefore$ $a^2 = a^2 (e^2 - 1)$

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு $e = \sqrt{2}$.

செவ்வக அதிபர வளையத்தின் முனைகள் $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ மற்றும் குவியங்கள் (a, a), $(-a, -a)$.

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு $y = x$ மேலும் துணையச்சின் சமன்பாடு $y = -x$ ஆகும்.

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மையம் (h, k) ஆகவும், தொலைத் தொடுகோடுகள், x அச்சுக்கும், y-அச்சுக்கும் இணையாக இருந்தால், செவ்வக அதிபரவளையத்தின் பொதுச் சமன்பாடு $(x - h)(y - k) = c^2$ ஆகும்.

செவ்வக அதிபரவளையம் $xy = c^2$-இன் துணையலகுச் சமன்பாடுகள்

$x = ct$, $y = \frac{c}{t}$. இங்கு 't' என்பது துணையலகாகும். 't' ஒரு பூச்சியமற்ற மெய் எண்ணாகும். செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ஆகும். இந்தப் புள்ளியை 't' எனக் குறிப்போம்.

முடிவுகள் :

★ செவ்வக அதிபரவளையம் $xy = c^2$க்கு (x_1, y_1)இல் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xy_1 + yx_1 = 2c^2$

★ 't'இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x + yt^2 = 2ct$.

★ (x_1, y_1)இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 - yy_1 = {x_1}^2 - {y_1}^2$.

★ 't'இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - xt^2 = \frac{c}{t} - ct^3$

★ ஒரு தளத்தின் எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு இரு தொடுகோடுகளும், நான்கு செங்கோடுகளும் வரைய முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.69 : மையம் $\left(-2\ , \frac{-3}{2}\right)$ மற்றும் $\left(1,\ \frac{-2}{3}\right)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்லும் திட்டச் செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : $(h,\ k)$யை மையமாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபரவளையத்தின் பொதுவான சமன்பாடு $(x - h)\ (y - k) = c^2$

மையம் $\left(-2\ \ , \frac{-3}{2}\right)$.

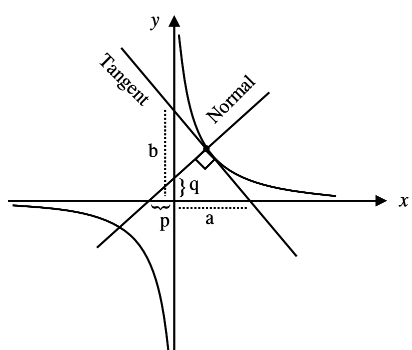
$\therefore$ திட்டச் செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x+2)\left(y + \frac{3}{2}\right) = c^2$

இது $\left(1\ \ , \ \frac{-2}{3}\right)$ வழிச் செல்வதால் $(1 + 2)\left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{2}\right) = c^2 \ \Rightarrow\ \ c^2 = \frac{5}{2}$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $(x + 2)\left(y + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$ அல்லது

$2xy + 3x + 4y + 1 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.70 : $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு x, y அச்சுக்களில் வெட்டும் துண்டுகள் a, b எனவும் இப்புள்ளியில் செங்கோட்டின் வெட்டும் துண்டுகள் p, q எனவும் இருப்பின் $ap + bq = 0$ எனக் காட்டுக.



படம் 4.102

தீர்வு :

$xy = c^2$க்கு 't'யில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x + yt^2 = 2ct$ ஆகும்

அல்லது $\frac{x}{2ct} + \frac{y}{2c/t} = 1$

$\therefore$ அச்சுக்களின் வெட்டுத் துண்டுகள் $a = 2ct$, $b = \frac{2c}{t}$.

$xy = c^2$க்கு 't'யில் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - xt^2 = \frac{c}{t} - ct^3$

$$\frac{x}{\left(\frac{\frac{c}{t} - ct^3}{-t^2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c}{t} - ct^3\right)} = 1$$

$\therefore$ அச்சுக்களின் வெட்டுத் துண்டுகள்

$$p = \frac{-1}{t^2}\left(\frac{c}{t} - ct^3\right), \quad q = \frac{c}{t} - ct^3$$

$$\begin{aligned}\therefore \ ap + bq &= 2ct\left(\frac{-1}{t^2}\right)\left(\frac{c}{t} - ct^3\right) + \frac{2c}{t}\left(\frac{c}{t} - ct^3\right)\\ &= -\frac{2c}{t}\left(\frac{c}{t} - ct^3\right) + \frac{2c}{t}\left(\frac{c}{t} - ct^3\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

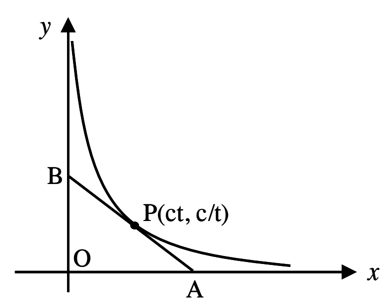
எடுத்துக்காட்டு 4. 71 :

ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி தொலைத்தொடு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட பாகத்தினை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$யில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x + yt^2 = 2ct$

இதில் $y = 0$ எனப் பிரதியிட, புள்ளி Aஇன் ஆயத் தொலைவுகள் $(2ct, 0)$ ஆகும். $x = 0$ எனப் பிரதியிட, புள்ளி Bஇன் ஆயத் தொலைவுகள் $\left(0, \frac{2c}{t}\right)$ ஆகும்.



படம் 4.103

ABஇன் மையப்புள்ளி $P\left(\dfrac{2ct+0}{2}, \dfrac{0+\dfrac{2c}{t}}{2}\right) = \left(ct, \dfrac{c}{t}\right)$

எனவே தொடுகோடு, தொடு புள்ளியால் இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது.

பயிற்சி 4.6

(1) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ஐ மையமாகக் கொண்டு $\left(1, \frac{1}{4}\right)$என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் திட்ட செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(2) பின்வரும் செவ்வக அதிபரவளையங்களுக்கு தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $xy = 12$ க்குபுள்ளி $(3, 4)$இல்

(ii) $2xy - 2x - 8y - 1 = 0$க்கு புள்ளி $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ இல்

(3) $x + 2y - 5 = 0$-ஐ ஒரு தொலைத் தொடுகோடாகவும், $(6, 0)$ மற்றும் $(-3, 0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடியதுமான செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(4) ஒரு திட்ட செவ்வக அதிபரவளையத்தின் முனைகள் $(5, 7)$ மற்றும் $(-3, -1)$ ஆகவும் இருப்பின், அதன் சமன்பாட்டையும், தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(5) $(2, 1)$ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வக அதிபரவளையமானது $(1, -1)$ வழியே செல்கிறது. இதன் ஒரு தொலைத் தொடுகோடு $3x - y - 5 = 0$ எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(6) கீழ்க்காணும் செவ்வக அதிபரவளையங்களின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $xy - kx - hy = 0$ (ii) $2xy + 3x + 4y + 1 = 0$

(iii) $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 12x + 5y + 3 = 0$

(7) செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிடத்து வரையப்படும் தொடுகோடு, தொலைத் தொடுகோடுகளுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

சில முடிவுகள் [நிரூபணமின்றி]

(1) அதிபரவளையத்தின் ஒரு குவியத்திலிருந்து ஒரு தொலைத் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியானது ஒத்த இயக்குவரையின் மேல் அமையும்.

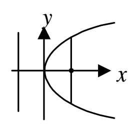
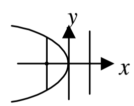
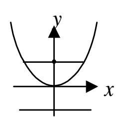
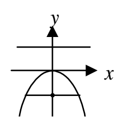
(2) தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு இரு தொடுகோடுகளும், நான்கு செங்கோடுகளும் வரையலாம்.

(3) $lx + my + n = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய நிபந்தனை $4c^2lm = n^2$

(4) $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு 't_1' என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு மீண்டும் செவ்வக அதிபரவளையத்தில் 't_2' என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமானால் $t_1^3\, t_2 = -1$

குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்டுள்ள முடிவுகளுக்கு நிரூபணம் வேண்டுமாயின் தீர்வுப் புத்தகத்தைப் பார்க்கவும்.

நான்கு வகையான பரவளையங்களின் முடிவுகளின் தொகுப்பு

வகை	சமன்பாடு	வரைப்படம்	குவியம்	இயக்கு வரையின் சமன்பாடு	அச்சு	முனை	செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் நீளம்
வலப்புறம் திறப்புடையது	$y^2 = 4ax$		$(a, 0)$	$x = -a$	$y = 0$	$(0, 0)$	$x = a$	$4a$
இடப்புறம் திறப்புடையது	$y^2 = -4ax$		$(-a, 0)$	$x = a$	$y = 0$	$(0, 0)$	$x = -a$	$4a$
மேல்நோக்கித் திறப்புடையது	$x^2 = 4ay$		$(0, a)$	$y = -a$	$x = 0$	$(0, 0)$	$y = a$	$4a$
கீழ்ப்புறம் திறப்புடையது	$x^2 = -4ay$		$(0, -a)$	$y = a$	$x = 0$	$(0, 0)$	$y = -a$	$4a$

இவ்வாறாக பின்வருவனவற்றை அடைகின்றோம்.

கார்டீசியன் வடிவம்	**பரவளையம்**	**நீள்வட்டம்**	**அதிபரவளையம்**
(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2)ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு	$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$	$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x - x_1)$	$y - y_1 = \frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x - x_1)$
(x_1, y_1)இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு	$yy_1 = 2a(x + x_1)$	$xx_1 / a^2 + yy_1/b^2 = 1$	$xx_1 / a^2 - yy_1/b^2 = 1$
(x_1, y_1)இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு	$xy_1 + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1$	$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$	$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$

துணையலகு வடிவம்	**பரவளையம்**	**நீள்வட்டம்**	**அதிபரவளையம்**
நாணின் சமன்பாடு	't_1' மற்றும் 't_2'ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$	'θ'$_1$ மற்றும் 'θ'$_2$ ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} = \cos\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}$	'θ'$_1$ மற்றும் 'θ'$_2$ ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2} - \frac{y}{b}\sin\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} = \cos\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$
தொடுகோட்டின் சமன்பாடு	't'ல் $yt = x + at^2$	'θ'ல் $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$	'θ'ல் $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$
செங்கோட்டின் சமன்பாடு	't'ல் $tx + y = 2at + at^3$	$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$	$\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$

பல்வாய்ப்பு விடையளி வினாக்கள்
(குறிக்கோள் வினாக்கள்)
(OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

சரியான அல்லது ஏற்புடைய விடையினை எடுத்தெழுதுக:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் காண்க.*

(1) 1(2) 2 (3) 3 (4) 4

(2) $\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -4 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ *என்ற மூலை விட்ட அணியின் தரம் காண்க.*

(1) 0(2) 2 (3) 3 (4) 5

(3) $A = [2 \;\; 0 \;\; 1]$ *எனில், AA^T இன் தரம் காண்க.*

(1) 1(2) 2 (3) 3 (4) 0

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *எனில் AA^Tஇன் தரம் காண்க.*

(1) 3(2) 0 (3) 1 (4) 2

(5) $\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *என்ற அணியின் தரம் 2 எனில், λவின் மதிப்பு*

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) எதேனும் ஒரு மெய்யெண்

(6) *ஒரு திசையிலி அணியின் வரிசை 3, திசையிலி $k \neq 0$ எனில், A^{-1} என்பது*

(1) $\frac{1}{k^2}$ I (2) $\frac{1}{k^3}$ I (3) $\frac{1}{k}$ I (4) kI

(7) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & k & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *என்ற அணிக்கு நேர்மாறு உண்டு எனில் kஇன் மதிப்புகள்*

(1) k ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் (2) $k = -4$ (3) $k \neq -4$ (4) $k \neq 4$

(8) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு (adj A) A =

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(9) ஒரு சதுர அணி Aஇன் வரிசை n எனில் | adj A | என்பது

(1) $|A|^2$ (2) $|A|^n$ (3) $|A|^{n-1}$ (4) $|A|$

(10) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(11) A என்ற அணியின் வரிசை 3 எனில் det (kA) என்பது

(1) k^3det (A) (2) k^2 det(A) (3) k det (A) (4) det (A)

(12) அலகு அணி Iஇன் வரிசை n, $k \neq 0$ ஒரு மாறிலி எனில், adj(kI) =

(1) k^n (adj I) (2) k (adj I) (3) k^2 (adj (I)) (4) k^{n-1} (adj I)

(13) A, B என்ற ஏதேனும் இரு அணிகளுக்கு AB = O என்று இருந்து மேலும் A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்,

(1) B = O (2) B ஒரு பூச்சியக் கோவை அணி

(3) B ஒரு பூச்சியமற்ற மற்ற கோவை அணி (4) $B = A$

(14) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், A^{12} என்பது

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^{12} \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(15) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ என்பதன் நேர்மாறு

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(16) மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகளில் அமைந்த மூன்று நேரிய அசமபடித்தான சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0 \;\; \Delta_z = 0$ எனில், தொகுப்புக்கானத் தீர்வு

(1) ஒரே ஒரு தீர்வு (2) இரண்டு தீர்வுகள்

(3) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் (4) தீர்வு இல்லாமை

(17) $ax + y + z = 0 \;;\; x + by + z = 0 \;;\; x + y + cz = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒரு வெளிப்படையற்ற தீர்வை பெற்றிருப்பின் $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} =$

(1) 1(2) 2 (3) – 1 (4) 0

(18) $ae^x + be^y = c \;;\; pe^x + qe^y = d$ மற்றும் $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \;;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & b \\ d & q \end{vmatrix}$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & c \\ p & d \end{vmatrix}$ எனில், (x, y)இன் மதிப்பு

(1) $\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$ (2) $\left(\log\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \log\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$

(3) $\left(\log\frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \log\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)$ (4) $\left(\log\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \log\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)$

(19) $-2x + y + z = l \;;\; x - 2y + z = m \;;\; x + y - 2z = n$ என்ற சமன்பாடுகள் $l + m + n = 0$ எனுமாறு அமையுமாயின் அத்தொகுப்பின் தீர்வு

(1) ஒரே ஒரு பூச்சியமற்ற தீர்வு (2) வெளிப்படைத் தீர்வு

(3) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வு (4) தீர்வு இல்லாமை பெற்று இருக்கும்

(20) $\vec{a}$ ஒரு பூச்சியமற்ற வெக்டராகவும், m ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலியாகவும் இருப்பின் $m\vec{a}$ ஆனது ஓரலகு வெக்டர் எனில்,

(1) $m = \pm 1$ (2) $a = |m|$ (3) $a = \frac{1}{|m|}$ (4) $a = 1$

(21) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இரண்டு ஓரலகு வெக்டர் மற்றும் θ என்பது அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம். $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ ஆனது ஓரலகு வெக்டராயின்,

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (2) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (3) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (4) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(22) $\vec{a}$-க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $120°$ மேலும் அவற்றின் எண்ணளவுகள் முறையே $2, \sqrt{3}$ எனில் $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ஆனது

(1) $\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{3}$ (3) 2 (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(23) $\vec{u} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ எனில்,

(1) u ஒரு ஓரலகு வெக்டர் (2) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(3) $\vec{u} = \vec{0}$ (4) $\vec{u} \neq \vec{0}$

(24) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\left|\vec{c}\right| = 5$ எனில், $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{2\pi}{3}$ (3) $\frac{5\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

(25) $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்களாயின்,

(1) $a = 2,\ b = 3,\ c = -4$ (2) $a = 4,\ b = 4,\ c = 5$

(3) $a = 4,\ b = 4,\ c = -5$ (4) $a = -2,\ b = 3,\ c = 4$

(26) $3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ என்ற வெக்டரை ஒரு மூலை விட்டமாகவும் $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$-ஐ ஒரு பக்கமாகவும் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு

(1) $10\sqrt{3}$ (2) $6\sqrt{30}$ (3) $\frac{3}{2}\sqrt{30}$ (4) $3\sqrt{30}$

(27) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ எனில்

(1) $\vec{a}$-ம் $\vec{b}$-ம் இணையாகும்

(2) $\vec{a}$-ம் $\vec{b}$-ம் செங்குத்தாகும்

(3) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$

(4) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஓரலகு வெக்டர்

(28) $\vec{p}$, $\vec{q}$ மற்றும் $\vec{p} + \vec{q}$ ஆகியவை எண்ணளவு λ கொண்ட வெக்டர்களாயின் $\left|\vec{p} - \vec{q}\right|$ ஆனது

(1) 2λ (2) $\sqrt{3}\lambda$ (3) $\sqrt{2}\lambda$ (4) 1

(29) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{x} \times \vec{y}$ எனில்,

(1) $\vec{x} = \vec{0}$

(2) $\vec{y} = \vec{0}$

(3) $\vec{x}$-ம் $\vec{y}$-ம் இணையாகும்

(4) $\vec{x} = \vec{0}$ அல்லது $\vec{y} = \vec{0}$ அல்லது $\vec{x}$-ம் $\vec{y}$-ம் இணையாகும்

(30) $\vec{PR} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{QS} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ எனில், நாற்கரம் $PQRS$இன் பரப்பு

(1) $5\sqrt{3}$ (2) $10\sqrt{3}$ (3) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{3}{2}$

(31) $\vec{OQ}$ என்ற அலகு வெக்டர் மீதான $\vec{OP}$இன் வீழலானது $OPRQ$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பை போன்று மும்மடங்காயின் $\angle POQ$ ஆனது

(1) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$ (3) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ (4) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

(32) $\vec{b}$இன் மீது $\vec{a}$இன் வீழல் மற்றும் $\vec{a}$இன் மீது $\vec{b}$இன் வீழலும் சமமாயின் $\vec{a} + \vec{b}$ மற்றும் $\vec{a} - \vec{b}$க்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{2\pi}{3}$

(33) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற ஒரு தளமற்ற வெக்டர்களுக்கு

$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ எனில்,

(1) $\vec{a}$ ஆனது $\vec{b}$க்கு இணை (2) $\vec{b}$ ஆனது $\vec{c}$க்கு இணை

(3) $\vec{c}$ ஆனது $\vec{a}$க்கு இணை (4) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

(34) ஒரு கோடு x மற்றும் y அச்சுக்களுடன் மிகை திசையில் $45°$, $60°$ கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது எனில் z அச்சுடன் அது உண்டாக்கும் கோணம்

(1) $30°$ (2) $90'$ (3) $45°$ (4) $60°$

(35) $\left[\vec{a} \times \vec{b},\ \vec{b} \times \vec{c},\ \vec{c} \times \vec{a}\right] = 64$ எனில் $\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]$இன் மதிப்பு

(1) 32 (2) 8 (3) 128 (4) 0

(36) $\left[\vec{a} + \vec{b},\ \vec{b} + \vec{c},\ \vec{c} + \vec{a}\right] = 8$ எனில் $\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]$இன் மதிப்பு

(1) 4(2) 16 (3) 32 (4) – 4

(37) $\left[\vec{i} + \vec{j},\ \vec{j} + \vec{k},\ \vec{k} + \vec{i}\right]$ இன் மதிப்பு

(1) 0(2) 1 (3) 2 (4) 4

(38) (2, 10, 1) என்ற புள்ளிக்கும் $\vec{r} \cdot \left(3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\right) = 2\sqrt{26}$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரம்

(1) $2\sqrt{26}$ (2) $\sqrt{26}$ (3) 2 (4) $\frac{1}{\sqrt{26}}$

(39) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ என்பது

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ மற்றும் $\vec{d}$க்கு செங்குத்து

(2) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ மற்றும் $\left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணை

(3) $\vec{a},\ \vec{b}$ஐ கொண்ட தளமும் $\vec{c},\ \vec{d}$ஐ கொண்ட தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் கோட்டிற்கு இணை

(4) $\vec{a},\ \vec{b}$ஐ கொண்ட தளமும் $\vec{c},\ \vec{d}$ஐ கொண்ட தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் கோட்டிற்குச் செங்குத்து.

(40) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ என்பன a, b, c ஆகியவற்றை மட்டுக்களாகக் கொண்டு வலக்கை அமைப்பில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்கள் எனில் $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$இன் மதிப்பு

(1) $a^2 b^2 c^2$ (2) 0 (3) $\frac{1}{2} abc$ (4) abc

(41) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஒரு தளம் அமையா வெக்டர்கள் மேலும்

$\left[\vec{a} \times \vec{b} \;\; \vec{b} \times \vec{c} \;\; \vec{c} \times \vec{a}\right] = \left[\vec{a} + \vec{b} \;\; \vec{b} + \vec{c} \;\; \vec{c} + \vec{a}\right]$ எனில்

$\left[\vec{a} \;\; \vec{b} \;\; \vec{c}\right]$இன் மதிப்பு

(1) 2(2) 3 (3) 1 (4) 0

(42) $\vec{r} = s\,\vec{i} + t\,\vec{j}$ என்ற சமன்பாடு குறிப்பது

(1) $\vec{i}$ மற்றும் $\vec{j}$ புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு

(2) *xoy* தளம் (3) *yoz* தளம் (4) *zox* தளம்

(43) $\vec{i} + a\vec{j} - \vec{k}$ எனும் விசை $\vec{i} + \vec{j}$ எனும் புள்ளிவழியேச் செயல்படுகிறது. $\vec{j} + \vec{k}$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து அதன் திருப்புத் திறனின் அளவு $\sqrt{8}$ எனில் aஇன் மதிப்பு

(1) 1(2) 2 (3) 3 (4) 4

(44) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{2z-5}{3}$க்கு இணையாகவும் (1, 3, 5) புள்ளி வழியாகவும் செல்லக்கூடிய கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு

(1) $\vec{r} = \left(\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}\right) + t\left(\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$

(2) $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} + t\left(\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

(3) $\vec{r} = \left(\vec{i} + 5\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}\right) + t\left(\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$

(4) $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} + t\left(\vec{i} + 5\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}\right)$

(45) $\vec{r} = \left(\vec{i} - \vec{k}\right) + t\left(3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}\right)$ என்ற கோடும்

$\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = 8$ என்ற தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி

(1) (8, 6, 22) (2) (– 8, – 6, – 22) (3) (4, 3, 11) (4) (– 4, – 3, – 11)

(46) (2, 1, – 1) என்ற புள்ளி வழியாகவும், தளங்கள்

$\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) = 0$; $\vec{r} \cdot \left(\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) = 0$ வெட்டிக் கொள்ளும் கோட்டை உள்ளடக்கியதுமான தளத்தின் சமன்பாடு

(1) $x + 4y - z = 0$ (2) $x + 9y + 11z = 0$

(3) $2x + y - z + 5 = 0$ (4) $2x - y + z = 0$

(47) $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ என்ற விசை ஒரு துகளை $A(3, 3, 3)$ எனும் நிலையிலிருந்து $B(4, 4, 4)$ எனும் நிலைக்கு நகர்த்தினால் அவ்விசை செய்யும் வேலையளவு.

(1) 2 அலகுகள் (2) 3 அலகுகள் (3) 4 அலகுகள் (4) 7 அலகுகள்

(48) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ எனில் $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு ஓரலகு வெக்டர்

(1) $\dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{3}}$ (4) $\dfrac{\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$

(49) $\dfrac{x-6}{-6} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z-4}{-8}$ மற்றும் $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

(1) (0, 0, – 4) (2) (1, 0, 0) (3) (0, 2, 0) (4) (1, 2, 0)

(50) $\vec{r} = \left(-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + t\left(-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$ மற்றும் $\vec{r} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}\right) + s\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

(1) (2, 1, 1) (2) (1, 2, 1) (3) (1, 1, 2) (4) (1, 1, 1)

(51) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ மற்றும் $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-5}{5}$ என்ற கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தொலைவு

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (3) $\dfrac{2}{3}$ (4) $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$

(52) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{-3}$ மற்றும் $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$ என்ற இணை கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தொலைவு

(1) 3(2) 2 (3) 1 (4) 0

(53) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ மற்றம் $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z-1}{2}$ ஆகிய இரு கோடுகளும்

(1) இணை (2) வெட்டிக் கொள்பவை

(3) ஒரு தளம் அமையாதவை (4) செங்குத்து

(54) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z + 1 = 0$ என்ற கோளத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம்

(1) $(-3, 4, -5), 49$ (2) $(-6, 8, -10), 1$

(3) $(3, -4, 5), 7$ (4) $(6, -8, 10), 7$

(55) $\left[\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right]^{100} + \left[\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right]^{100}$ இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 0 (3) -1 (4) 1

(56) $\left[e^{3 - i\pi/4}\right]^3$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டு வீச்சு முறையே

(1) $e^9, \frac{\pi}{2}$ (2) $e^9, \frac{-\pi}{2}$ (3) $e^6, \frac{-3\pi}{4}$ (4) $e^9, \frac{-3\pi}{4}$

(57) $(2m + 3) + i(3n - 2)$ என்ற கலப்பெண்ணின் இணையென் $(m - 5) + i(n + 4)$ எனில் (n, m) என்பது

(1) $\left(-\frac{1}{2}\ -8\right)$ (2) $\left(-\frac{1}{2}, 8\right)$ (3) $\left(\frac{1}{2}, -8\right)$ (4) $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$

(58) $x^2 + y^2 = 1$ எனில் $\frac{1 + x + iy}{1 + x - iy}$ இன் மதிப்பு

(1) $x - iy$ (2) $2x$ (3) $-2iy$ (4) $x + iy$

(59) $2 + i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டு

(1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{13}$ (3) $\sqrt{7}$ (4) 7

(60) $A + i\mathrm{B} = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3)$ எனில் $A^2 + B^2$ இன் மதிப்பு

(1) $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2$

(2) $(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2$

(3) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)$

(4) $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

(61) $a = 3 + i$ மற்றும் $z = 2 - 3i$ எனில் உள்ள az, $3az$ மற்றும் $-az$ என்பன ஒரு ஆர்கன் தளத்தில்

(1) செங்கோண முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள்

(2) சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள்

(3) இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள்

(4) ஒரே கோடமைவன

(62) கலப்பெண் தளத்தில் z_1, z_2, z_3, z_4 என்ற புள்ளிகள் முறையே ஒரு இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகளாக இருப்பதற்கும் அதன் மறுதலையும் உண்மையாக இருப்பதற்கும் உள்ள நிபந்தனை

(1) $z_1 + z_4 = z_2 + z_3$ (2) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$

(3) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ (iv) $z_1 - z_2 = z_3 - z_4$

(63) z ஒரு கலப்பெண்ணைக் குறிப்பதெனில் $\arg(z) + \arg(\bar{z})$ என்பது

(1) $\pi/4$ (2) $\pi/2$ (3) 0 (4) $\pi/4$

(64) ஒரு கலப்பெண்ணின் வீச்சு $\pi/2$ எனில் அந்த எண்

(1) முற்றிலும் கற்பனை எண் (2) முற்றிலும் மெய் எண்

(3) 0 (4) மெய்யுமல்ல கற்பனையுமல்ல

(65) iz என்ற கலப்பெண்ணை ஆதியைப் பொறுத்து $\frac{\pi}{2}$ கோணத்தில் கடிகார எதிர்திசையில் சுழற்றும்போது அந்த எண்ணின் புதிய நிலை

(1) iz (2) $-iz$ (3) $-z$ (4) z

(66) கலப்பெண் $(i^{25})^3$இன் போலார் வடிவம்

(1) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ (2) $\cos\pi + i\sin\pi$

(3) $\cos\pi - i\sin\pi$ (4) $\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$

(67) P ஆனது கலப்பு எண் மாறி zஐ குறிக்கின்றது $|2z - 1| = 2|z|$ எனில் Pஇன் நியமப்பாதை

(1) $x = \frac{1}{4}$ என்ற நேர்க்கோடு (2) $y = \frac{1}{4}$ என்ற நேர்க்கோடு

(3) $z = \frac{1}{2}$ என்ற நேர்க்கோடு (4) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ என்ற வட்டம்

(68) $\dfrac{1 + e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta}} =$

(1) $\cos\theta + i\sin\theta$ (2) $\cos\theta - i\sin\theta$

(3) $\sin\theta - i\cos\theta$ (4) $\sin\theta + i\cos\theta$

(69) $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ எனில் $z_1 z_2 \ldots z_6$ என்பது

(1) 1 (2) -1 (3) i (4) $-i$

(70) $-\bar{z}$ மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைந்தால் z அமையும் கால் பகுதி

(1) முதல் கால் பகுதி (2) இரண்டாம் கால் பகுதி

(3) மூன்றாம் கால் பகுதி (4) நான்காம் கால் பகுதி

(71) $x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில் $x^n + \frac{1}{x^n}$இன் மதிப்பு

(1) $2\cos n\theta$ (2) $2i\sin n\theta$ (3) $2\sin n\theta$ (4) $2i\cos n\theta$

(72) $a = \cos\alpha - i\sin\alpha$, $b = \cos\beta - i\sin\beta$

$c = \cos\gamma - i\sin\gamma$ எனில் $(a^2 c^2 - b^2) / abc$ என்பது

(1) $\cos 2(\alpha - \beta + \gamma) + i\sin 2(\alpha - \beta + \gamma)$

(2) $-2\cos(\alpha - \beta + \gamma)$

(3) $-2i\sin(\alpha - \beta + \gamma)$

(4) $2\cos(\alpha - \beta + \gamma)$

(73) $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = -3 + 2i$ எனில், $\frac{z_1}{z_2}$ என்பது

(1) $\frac{2}{13} - \frac{22}{13}i$ (2) $-\frac{2}{13} + \frac{22}{13}i$

(3) $\frac{-2}{13} - \frac{23}{13}i$ (4) $\frac{2}{13} + \frac{22}{13}i$

(74) $i + i^{22} + i^{23} + i^{24} + i^{25}$இன் மதிப்பு என்பது

(1) i (2) $-i$ (3) 1 (4) -1

(75) $i^{13} + i^{14} + i^{15} + i^{16}$இன் இணை கலப்பெண்

(1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) $-i$

(76) $-i + 2$ என்பது $ax^2 - bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமெனில் மற்றொரு தீர்வு

(1) $-i-2$ (2) $i-2$ (3) $2+i$ (4) $2i+i$

(77) $\pm i\sqrt{7}$ என்ற தீர்வுகளைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

(1) $x^2 + 7 = 0$ (2) $x^2 - 7 = 0$

(3) $x^2 + x + 7 = 0$ (4) $x^2 - x - 7 = 0$

(78) $4 - 3i$ மற்றும் $4 + 3i$ என்ற மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு

(1) $x^2 + 8x + 25 = 0$ (2) $x^2 + 8x - 25 = 0$

(3) $x^2 - 8x + 25 = 0$ (4) $x^2 - 8x - 25 = 0$

(79) $ax^2 + bx + 1 = 0$ என்!ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\frac{1-i}{1+i}$, aயும் bயும் மெய் எனில் (a, b) என்பது

(1) (1, 1) (2) (1, -1) (3) (0, 1) (4) (1, 0)

(80) $x^2 - 6x + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $-i + 3$எனில் kஇன் மதிப்பு

(1) 5 (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) 10

(81) ω என்பது 1இன் முப்படி மூலம் எனில்

$(1 - \omega + \omega^2)^4 + (1 + \omega - \omega^2)^4$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 32 (3) – 16 (4) – 32

(82) ω என்பது 1இன் nஆம் படி மூலம் எனில்,

(1) $1 + \omega^2 + \omega^4 + \ldots = \omega + \omega^3 + \omega^5 + \ldots$

(2) $\omega^n = 0$ (3) $\omega^n = 1$ (4) $\omega = \omega^{n-1}$

(83) ω என்பது 1இன் முப்படி மூலம் எனில்,

$(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)$இன் மதிப்பு

(1) 9 (2) – 9 (3) 16 (4) 32

(84) $y^2 - 2y + 8x - 23 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு

(1) $y = -1$ (2) $x = -3$ (3) $x = 3$ (4) $y = 1$

(85) $16x^2 - 3y^2 - 32x - 12y - 44 = 0$ என்பது

(1) ஒரு நீள்வட்டம் (2) ஒரு வட்டம்

(3) ஒரு பரவளையம் (4) ஒரு அதிபரவளையம்

(86) $4x + 2y = c$ என்ற கோடு $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையத்தின் தொடுகோடு எனில் c இன் மதிப்பு

(1) – 1 (2) – 2 (3) 4 (4) – 4

(87) $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்தில் $t_1 = t$ மற்றும் $t_2 = 3t$ என்ற புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி

(1) $(6t^2, 8t)$ (2) $(8t, 6t^2)$ (3) $(t^2, 4t)$ (4) $(4t, t^2)$

(88) $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்

(1) 8(2) 6 (3) 4 (4) 2

(89) $y^2 = x + 4$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு

(1) $x = \frac{15}{4}$ (2) $x = -\frac{15}{4}$ (3) $x = -\frac{17}{4}$ (4) $x = \frac{17}{4}$

(90) (2, – 3) என்ற முனை, $x = 4$ என்ற இயக்குவரையைக் கொண்ட பரவளையத்தின் செவ்வகல நீளம்

(1) 2(2) 4 (3) 6 (4) 8

(91) $x^2 = 16y$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம்

(1) (4, 0) (2) (0, 4) (3) (– 4, 0) (4) (0, – 4)

(92) $x^2 = 8y - 1$ என்ற பரவளையத்தின் முனை

(1) $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$ (2) $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ (3) $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ (4) $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$

(93) $2x + 3y + 9 = 0$ என்ற கோடு $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்தைத் தொடும் புள்ளி

(1) $(0, -3)$ (2) $(2, 4)$ (3) $\left(-6, \frac{9}{2}\right)$ (4) $\left(\frac{9}{2}, -6\right)$

(94) $y^2 = 12x$ என்ற பரவளையத்தின் குவிநாணின் இறுதிப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி அமையும் கோடு

(1) $x - 3 = 0$ (2) $x + 3 = 0$ (3) $y + 3 = 0$ (4) $y - 3 = 0$

(95) $(-4, 4)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 16x$க்கு வரையப்படும் இரு தொடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்

(1) 45° (2) 30° (3) 60° (4) 90°

(96) $9x^2 + 5y^2 - 54x - 40y + 116 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையத் தொலைத்தகவு (e)இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$(2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(97) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் அரை-நெட்டச்சு மற்றும் அரை-குற்றச்சு நீளங்கள்

(1) 26, 12 (2) 13, 24 (3) 12, 26 (4) 13, 12

(98) $9x^2 + 5y^2 = 180$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தொலைவு

(1) 4(2) 6 (3) 8 (4) 2

(99) ஒரு நீள் வட்டத்தின் நெட்டச்சு மற்றும் அதன் அரை குற்றச்சுகளின் நீளங்கள் 8, 2 முறையே அதன் சமன்பாடுகள் $y - 6 = 0$ மற்றும் $x + 4 = 0$ எனில், நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

(1) $\frac{(x+4)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1$ (2) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$

(3) $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-6)^2}{4} = 1$ (4) $\frac{(x+4)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{16} = 1$

(100) $2x - y + c = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $4x^2 + 8y^2 = 32$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில் cஇன் மதிப்பு

(1) $\pm 2\sqrt{3}$ (2) ± 6 (3) 36 (4) ± 4

(101) $4x^2 + 9y^2 = 36$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து $(\sqrt{5}, 0)$மற்றும் $(-\sqrt{5}, 0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவுகளின் கூடுதல்

(1) 4(2) 8 (3) 6 (4) 18

(102) $9x^2 + 16y^2 = 144$ என்ற கூம்பு வளைவின் இயக்கு வட்டத்தின் ஆரம்

(1) $\sqrt{7}$ (2) 4 (3) 3 (4) 5

(103) $16x^2 + 25y^2 = 400$ என்ற வளைவரையின் குவியத்திலிருந்து ஒரு தொடுகோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடியின் நியமப்பாதை

(1) $x^2 + y^2 = 4$ (2) $x^2 + y^2 = 25$ (3) $x^2 + y^2 = 16$ (4) $x^2 + y^2 = 9$

(104) $12y^2 - 4x^2 - 24x + 48y - 127 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(1) 4(2) 3 (3) 2 (4) 6

(105) செவ்வகலத்தின் நீளம், துணையச்சின் நீளத்தில் பாதி எனக் கொண்டுள்ள அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(106) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள எதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து குவியத்திற்கு இடையேயுள்ள தொலைவுகளின் வித்தியாசம் 24 மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு 2 எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

(1) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{432} = 1$ (2) $\frac{x^2}{432} - \frac{y^2}{144} = 1$ (3) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12\sqrt{3}} = 1$ (4) $\frac{x^2}{12\sqrt{3}} - \frac{y^2}{12} = 1$

(107) $x^2 - 4(y-3)^2 = 16$ என்ற அதிபரவளையத்தின் இயக்குவரை

(1) $y = \pm\frac{8}{\sqrt{5}}$ (2) $x = \pm\frac{8}{\sqrt{5}}$ (3) $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{8}$ (4) $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{8}$

(108) $4x^2 - y^2 = 36$க்கு $5x - 2y + 4k = 0$ என்ற கோடு ஒரு தொடுகோடு எனில், k இன் மதிப்பு

(1) 4/9 (2) 2/3 (3) 9/4 (4) 81/16

(109) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு (2, 1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண்

(1) $9x - 8y - 72 = 0$ (2) $9x + 8y + 72 = 0$

(3) $8x - 9y - 72 = 0$ (4) $8x + 9y + 72 = 0$

(110) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம்

(1) $\pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (2) $\pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (3) $2\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (4) $2\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

(111) $36y^2 - 25x^2 + 900 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

(1) $y = \pm\frac{6}{5}x$ (2) $y = \pm\frac{5}{6}x$ (3) $y = \pm\frac{36}{25}x$ (4) $y = \pm\frac{25}{36}x$

(112) (8, 0) என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்து தூரங்களின் பெருக்கல் பலன்

(1) 25/576 (2) 576/25 (3) 6/25 (4) 25/6

(113) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை

(1) $x^2 + y^2 = 25$ (2) $x^2 + y^2 = 4$ (3) $x^2 + y^2 = 3$ (4) $x^2 + y^2 = 7$

(114) $x + 2y - 5 = 0$, $2x - y + 5 = 0$ என்ற தொலைத் தொடுகோடுகளைக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(1) 3(2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) 2

(115) $xy = 8$ என்ற செவ்வக பரவளையத்தின் அரை குறுக்கச்சின் நீளம்

(1) 2(2) 4 (3) 16 (4) 8

(116) $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் தொலைத்தொடுகோடுகள்

(1) $x = c, y = c$ (2) $x = 0, y = c$ (3) $x = c, y = 0$ (4) $x = 0, y = 0$

(117) $xy = 16$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் முனையின் ஆயத் தொலைவுகள்

(1) (4, 4), (− 4, − 4) (2) (2, 8), (− 2, − 8)

(3) (4, 0), (− 4, 0) (4) (8, 0), (− 8, 0)

(118) $xy = 18$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு குவியம்

(1) (6, 6) (2) (3, 3) (3) (4, 4) (4) (5, 5)

(119) $xy = 32$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்

(1) $8\sqrt{2}$ (2) 32 (3) 8 (4) 16

(120) $xy = 72$ என்ற திட்ட செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடு அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளுடன் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) 36 (2) 18 (3) 72 (4) 144

(121) $xy = 9$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள $\left(6, \frac{3}{2}\right)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து, வளைவரையை மீண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி

(1) $\left(\frac{3}{8}, 24\right)$ (2) $\left(-24, \frac{-3}{8}\right)$ (3) $\left(\frac{-3}{8}, -24\right)$ (4) $\left(24, \frac{3}{8}\right)$

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

(1) (i) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 15 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

(4) (i) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (v) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1.2

(1) $x = 3, y = -1$ (2) $x = -1, y = 2$ (3) $x = 1, y = 3, z = 5$

(4) $x = 4, y = 1, z = 0$ (5) $x = 1, y = 1, z = 1$

பயிற்சி 1.3

(1) 2 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 2 (6) 2

பயிற்சி 1.4

(1) (1, 1) (2) தீர்வு இல்லை (3) $\left(\frac{1}{4}(9-5k), k\right)$; $k \in R$

(4) (1, 1, 2) (5) $(4-k, 3k-4, k)$; $k \in R$ (6) (1, 2, 3)

(7) $\left(\frac{1}{3}(5k-12), \frac{1}{3}(15-4k), k\right)$; $k \in R$ (8) $\left(\frac{1}{2}(2+s-t), s, t\right)$; $s, t \in R$

(9) (1, 2, 1) (10) $(50+2k, 50-3k, k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots 16$

பயிற்சி 1.5

(1) (i) ஒருங்கமைவு உடையது : $x = 4, y = -1, z = 2$

(ii) ஒருங்கமைவு உடையது : $x = 2k - 1, \quad y = 3 - 2k, z = k$ எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்

(iii) ஒருங்கமைவு அற்றது

(iv) ஒருங்கமைவு அற்றது

(v) ஒருங்கமைவு உடையது : $x = 1 - k_1 + k_2, \quad y = k_1, z = k_2,$ எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்

(2) $\lambda \neq 0$ எனில், தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றுள்ளது

$\lambda = 0$ எனில், தொகுப்பு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளது

(3) $k \neq 1, k \neq -2$ எனில் இத்தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

$k = 1$ எனில் இத்தொகுப்பு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெறும். $k = -2$ எனில் இத்தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மேலும் தீர்வு அற்றது.

பயிற்சி 2.1

(1) 4 (2) -15 (3) $\frac{3}{2}$ (4) (i) $m = -15$ (ii) $m = \frac{2}{3}$

(5) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ (10) 22 (11) -25

(14) (i) 0 (ii) $\frac{-10}{\sqrt{30}}$ (iii) $\frac{9}{\sqrt{21}}$

பயிற்சி 2.2

(5) 7 (6) $\frac{50}{3}$ (7) 17 (8) $\frac{124}{7}$

பயிற்சி 2.3

(1) $\sqrt{6}$ (2) $3\sqrt{7}$ (3) $\pm\frac{(-i - j + 3k)}{\sqrt{11}}$ (4) $\pm\frac{\left(10\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}\right)}{3}$ (5) $\frac{\pi}{4}$ (6) $\frac{\pi}{6}$

பயிற்சி 2.4

(1) $6\sqrt{59}$ (2) $\frac{49}{2}$ (3) $6\sqrt{5}$ (4) $\frac{1}{2}\sqrt{165}$

(8) $-24\vec{i} + 13\vec{j} + 4\vec{k}$ (10) $7\sqrt{10}$, $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

பயிற்சி 2.5

(2) -3 (11) -4

பயிற்சி 2.6

(1) $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}\right)$ (2) (i) இயலாது (ii) இயலும்

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) தி.கொ. $\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}\right)$, $\vec{r} = 7\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right)$

(5) $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right)$

(6) $\vec{r} = \left(3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}\right) + t\left(9\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}\right)$; $\frac{x-3}{9} = \frac{y+4}{6} = \frac{z+2}{2}$

(7) $\vec{r} = \left(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) + t\left(-\vec{i} + 2\vec{k}\right)$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{2}$

(8) $\cos^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$ (9) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

பயிற்சி 2.7

(1) (i) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (ii) $\sqrt{\frac{285}{14}}$ (3) $(1, -1, 0)$ (4) $3\sqrt{30}$ (6) -2

பயிற்சி 2.8

(1) $\frac{\vec{r} \cdot \left(2\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}\right)}{\sqrt{117}} = 18$; $2x + 7y + 8z = 54\sqrt{13}$

(2) $\pm\frac{(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})}{3}$ (3) 2 அலகுகள்

(4) $8x - 4y + 3z = 89$ (5) $4x + 2y - 3z = 3$

(6) $\left[(x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-4)\vec{k}\right] \cdot \left(4\vec{i} - 12\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 0$

$4x - 12y - 3z - 8 = 0$

(7) $\vec{r} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}\right) + t\left(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right)$

$3x - 7y + 5z + 3 = 0$

(8) $\vec{r} = \left(\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) + s\left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) + t\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

$8x + y - 5z - 1 = 0$

(9) $\vec{r} = \left(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) + s\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) + t\left(3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

மற்றும் $2x + 4y - 5z = 0$

(10) $\vec{r} = \left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + s\left(-2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$

மற்றும் $2x - z + 1 = 0$

(11) $\vec{r} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + s\left(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right) + t\left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}\right)$

$2y + z - 7 = 0$

(12) $\vec{r} = \left(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) + s\left(3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

மற்றும் $8x - 10y - 7z + 11 = 0$

(13) $\vec{r} = \left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}\right) + s\left(-\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}\right) + t\left(4\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}\right)$

மற்றும் $6x + 13y - 28z - 14 = 0$

(15) (i) $2x - 5y - z + 15 = 0$ (ii) $2y - z - 1 = 0$

பயிற்சி 2.9

(1) $11x - 10y - 13z + 70 = 0$

(2) இல்லை. ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகளாக இருப்பதால்

(3) (2, 0, 0) (4) (6, – 1, – 5) (5) $\frac{7}{\sqrt{30}}$ (6) $\frac{3}{2\sqrt{11}}$

பயிற்சி 2.10

(1) (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{58}}\right)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{231}}\right)$

(3) $\frac{3}{5}$ (4) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{91}}\right)$ (5) $\frac{\pi}{3}$

பயிற்சி 2.11

(1) $\left|\vec{r} - \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)\right| = 4$ மற்றும் $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

(2) $\left[\vec{r} - \left(2\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}\right)\right] . \left[\vec{r} - \left(-2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}\right)\right] = 0$ மற்றும்
$x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 10z + 41 = 0$

மையம் (0, 5, – 5) மற்றும் ஆரம் 3 அலகுகள்.

(3) $\left|\vec{r} - \left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\right| = 5$; $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 22 = 0$

(4) $B(4, -2, 1)$

(5) (i) மையம் (2, – 1, 4) ; $r = 5$ அலகுகள்

(ii) மையம் $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$, $r = 2$ அலகுகள்

(iii) மையம் (– 2, 4, – 1), $r = \sqrt{26}$ அலகுகள்

(iv) மையம் (2, 1, – 3), $r = 5$ அலகுகள்

பயிற்சி 3.1

(1) (i) $1 + 3i$ (ii) $-i$ (iii) $-10 + 10i$ (iv) 1

(2)

	மெ.ப.	க.ப.
(i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
(ii)	$\frac{-7}{25}$	$\frac{26}{25}$
(iii)	8	– 1

(3) $n = 4$

(4) (i) $x = 2, \; y = -1$ (ii) $x = 3, \; y = -1$

(iii) $x = -7, \; y = -3$ மற்றும் $x = \frac{-8}{3}, \; y = \frac{4}{3}$

(5) $x = \pm 1, \; y = -4$ மற்றும் $x = \pm 2i, \; y = 1$

பயிற்சி 3.2

(2) $1 - 3i$ மற்றும் $-1 + 3i$

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(6) (i) $4 \text{ cis} \frac{\pi}{3}$ (ii) $2 \text{ cis} \frac{2\pi}{3}$ (iii) $\sqrt{2} \text{ cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (iv) $\sqrt{2} \text{ cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

(8) (i) $x + 2y = 2$ (ii) $y = 0$ (iii) $x + y + 1 = 0$

(iv) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 5 = 0$ (v) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

பயிற்சி 3.3

(1) $3 \pm i$, $1 \pm i$ (2) $1 \pm 2i$, $1 \pm i$ (3) $2 \pm i$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-1}{2}$

பயிற்சி 3.4

(1) cis (-107θ) (2) cis $(3\alpha + 4\beta)$

பயிற்சி 3.5

(1) (i) cis $\frac{\pi}{6}$, cis $\frac{5\pi}{6}$, cis $\frac{9\pi}{6}$ (ii) 2 cis $\frac{\pi}{6}$, 2cis $\frac{5\pi}{6}$, 2cis $\frac{9\pi}{6}$

(iii) $2^{2/3}$ cis $\left(\frac{-5\pi}{9}\right)$, $2^{2/3}$ cis $\frac{\pi}{9}$, $2^{2/3}$ cis $\left(\frac{7\pi}{9}\right)$

(4) (i) $\sqrt{2}$ cis $\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}$ cis $\frac{3\pi}{4}$, $\sqrt{2}$ cis $\frac{5\pi}{4}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ cis $\frac{7\pi}{4}$

(ii) cis $\frac{\pi}{5}$, cis $\frac{3\pi}{5}$, cis $\frac{7\pi}{5}$, cis $\frac{9\pi}{5}$

(5) cis $(2k-1)\frac{\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$

பயிற்சி 4.1

(1) (i) $4x^2 - 16x + 36y + 43 = 0$ (ii) $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 38x - 60y + 121 = 0$

(iii) $x^2 = -16y$ (iv) $(y-4)^2 = -12(x-1)$

(v) $(x-1)^2 = 12(y-2)$ (vi) $(y-4)^2 = -12(x-1)$

(vii) $(x-3)^2 = -8(y+2)$ (viii) $(y+1)^2 = 8(x-3)$

(ix) $(x-2)^2 = 16(y-3)$

2)

எண்	அச்சு	முனை	குவியம்	இயக்கு வரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் நீளம்
(i)	$y = 0$	(0, 0)	(– 2, 0)	$x - 2 = 0$	$x + 2 = 0$	8
(ii)	$x = 0$	(0, 0)	(0, 5)	$y + 5 = 0$	$y - 5 = 0$	20
(iii)	$x - 4 = 0$	(4, – 2)	(4, – 1)	$y + 3 = 0$	$y + 1 = 0$	4
(iv)	$y - 3 = 0$	(1, 3)	(– 1, 3)	$x - 3 = 0$	$x + 1 = 0$	8
(v)	$x - 3 = 0$	(3, – 1)	(3, 2)	$y + 4 = 0$	$y - 2 = 0$	12

(3) பிரதிபலிப்பானின் மையத்திலிருந்து குவியத்துக்குள்ள தூரம் 5. குவியம் (5, 0)

(4) விட்டம் = $40\sqrt{2}$ செ.மீ. (5) $20\sqrt{2}$ மீ.

பயிற்சி 4.2

(1) (i) $16x^2 + 25y^2 - 96x + 50y - 231 = 0$

(ii) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$ (iii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(iv) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{1} = 1$ (v) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

(vi) $\frac{(x-2)^2}{40} + \frac{(y-5)^2}{49} = 1$ (vii) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

(viii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (ix) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) (4, – 6) (3) $\frac{x^2}{81/4} + \frac{y^2}{45/4} = 1$

(4)

எண்	நெட்டச்சின் சமன்பாடு	குற்றச்சின் சமன்பாடு	நெட்டச்சின் நீளம்	குற்றச்சின் நீளம்
(i)	$y = 0$	$x = 0$	10	6
(ii)	$y - 2 = 0$	$x + 1 = 0$	6	$2\sqrt{5}$
(iii)	$x = 0$	$y = 0$	$2\sqrt{5}$	$\frac{4\sqrt{5}}{3}$
(iv)	$x + 1 = 0$	$y - 2 = 0$	8	6

(5)

எண்	இயக்குவரையின் சமன்பாடுகள்	செவ்வகலத்தின் சமன்பாடுகள்	செவ்வகலத்தின் நீளம்
(i)	$x = \pm \frac{169}{12}$	$x = \pm 12$	$\frac{50}{13}$
(ii)	$x = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$	$x = \pm\sqrt{7}$	$\frac{9}{2}$
(iii)	$x = 4 \pm \frac{20}{\sqrt{3}}$	$x = 4 \pm 5\sqrt{3}$	5
(iv)	$y = 10; y = -8$	$y = 4 ; y = -2$	$4\sqrt{3}$

(6)

எண்	e	மையம்	குவியங்கள்	முனைகள்
(i)	$\frac{3}{5}$	(0, 0)	(± 3, 0)	(± 5, 0)
(ii)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(4, 2)	$\left(4 \pm 5\sqrt{3}, 2\right)$	(14, 2) ; (– 6, 2)
(iii)	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	(0, 0)	$\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$	(0, ± 3)
(iv)	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	(– 1, 2)	$\left(-1, 2 \pm \sqrt{7}\right)$	(– 1, 6), (– 1, – 2)

(7) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ (8) 1200 கி.மீ

(9) (i) 28.584 மில்லியன் மைல் (ii) 43.416 மில்லியன் மைல்

(10) $\frac{4}{5}\sqrt{319}$ அடி

பயிற்சி 4.3

(1) (i) $x^2 - 16xy - 11y^2 + 20x + 50y - 35 = 0$ (ii) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$

(iii) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{288} = 1$ (iv) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

(v) $\frac{(y-5)^2}{75} - \frac{(x-2)^2}{25} = 1$ (vi) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{28} = 1$

(vii) $\frac{x^2}{1} - \frac{(y-5)^2}{8} = 1$ (viii) $\frac{(x-1)^2}{25/4} - \frac{(y-4)^2}{75/4} = 1$

(ix) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

(2)

எண்	குறுக்கச்சின் சமன்பாடு	துணையச்சின் சமன்பாடு	குறுக்கச்சின் நீளம்	துணையச்சின் நீளம்
(i)	$y = 0$	$x = 0$	10	24
(ii)	$x = 0$	$y = 0$	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
(iii)	$y - 2 = 0$	$x + 3 = 0$	6	8

(3)

எண்	இயக்குவரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் நீளம்
(i)	$x = \pm \frac{36}{\sqrt{13}}$	$x = \pm 4\sqrt{13}$	$\frac{32}{3}$
(ii)	$y = 4 \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$	$y = 4 \pm \sqrt{13}$	$\frac{8}{3}$

(5)

எண்	மையத் தொலைத் தகவு	மையம்	குவியம்	முனைகள்
(i)	$e = \frac{\sqrt{41}}{4}$	(0, 0)	$(\pm\sqrt{41}, 0)$	(± 4, 0)
(ii)	$e = \frac{\sqrt{34}}{3}$	(0, 0)	$(0, \pm\sqrt{34})$	(0, ± 3)
(iii)	$e = \frac{\sqrt{5}}{2}$	(– 3, 2)	$(-3 \pm \sqrt{5}, 2)$	(– 1, 2), (– 5, 2)
(iv)	$e = 2$	(– 3, 1)	(– 3, 5) (– 3, – 3)	(– 3, 3) (– 3, – 1)

பயிற்சி 4.4

(1) (i) $x + y + 3 = 0$; $x - y - 9 = 0$ (ii) $2x + 3y + 3 = 0$; $3x - 2y + 11 = 0$

(iii) $x - 2y + 2 = 0$; $2x + y - 1 = 0$ (iv) $x = \sqrt{3}$; $y = 0$

(v) $18x + 5y = 31$; $5x - 18y - 28 = 0$

(2) (i) $2x - y + 1 = 0$; $2x + 4y - 9 = 0$ (ii) $x + 2y - 8 = 0$; $2x - y - 6 = 0$

(iii) $4x + 5\sqrt{3}\, y = 40$; $10\sqrt{3}\, x - 8y - 9\sqrt{3} = 0$

(iv) $4\sqrt{3}\, x - 3y = 18$; $3x + 4\sqrt{3}\, y - 14\sqrt{3} = 0$

(3) (i) $3x - 2y + 2 = 0$ (ii) $x + 3y + 36 = 0$

(iii) $y = x \pm 5$ (iv) $10x - 3y \pm 32 = 0$

(4) (i) $x + 2y + 4 = 0$; $x + y + 1 = 0$

(ii) $x - 2y + 5 = 0$; $5x + 4y - 17 = 0$

(iii) $3x + y - 5 = 0$; $x - y + 1 = 0$ (5) $\left(5, \frac{-4}{3}\right)$ (6) $(-3, 1)$

(7) (i) $4x - y - 12 = 0$ (ii) $x + 5y - 5 = 0$ (iii) $10x - 9y - 12 = 0$

பயிற்சி 4.5

(1) (i) $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{6}\right) = 0$ மற்றும் $\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{6}\right) = 0$

(ii) $4x - y + 1 = 0$ மற்றும் $2x + 3y - 1 = 0$

(2) (i) $(2x + 3y - 8)(3x - 2y + 1) = 110$

(ii) $(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) + 64 = 0$

(3) (i) $\frac{2\pi}{3}$ (ii) $2\tan^{-1}\frac{3}{2}$ (iii) $2\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}$

பயிற்சி 4.6

(1) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$

(2) (i) $4x + 3y - 24 = 0$; $3x - 4y + 7 = 0$ (ii) $x + 8y = 0$; $32x - 4y + 65 = 0$

(3) $(x + 2y - 5)(2x - y + 4) = 16$

(4) $(x - 1)(y - 3) = 16$; $x - 1 = 0$, $y - 3 = 0$

(5) $(3x - y - 5)(x + 3y - 5) - 7 = 0$

(6) (i) $x - h = 0$ மற்றும் $y - k = 0$

(ii) $x + 2 = 0$; $y + \frac{3}{2} = 0$ (iii) $3x - 2y + 3 = 0$

$2x + 3y + 2 = 0$

குறிக்கோள் வினாக்களுக்கான விடைகள்

வி.எ.	விடை	வி.எ.	விடை	வி.எ.	விடை	வி.எ.	விடை	வி.எ.	விடை
1	1	26	4	51	2	76	3	101	3
2	3	27	2	52	1	77	1	102	4
3	1	28	2	53	3	78	3	103	2
4	3	29	4	54	3	79	4	104	3
5	1	30	3	55	3	80	4	105	4
6	3	31	1	56	4	81	3	106	1
7	3	32	1	57	1	82	3	107	2
8	4	33	3	58	4	83	1	108	3
9	3	34	4	59	3	84	4	109	1
10	3	35	2	60	3	85	4	110	3
11	1	36	1	61	4	86	4	111	2
12	4	37	3	62	2	87	1	112	2
13	1	38	3	63	3	88	3	113	1
14	2	39	3	64	1	89	3	114	2
15	1	40	4	65	3	90	4	115	2
16	4	41	1	66	4	91	2	116	4
17	1	42	2	67	1	92	3	117	1
18	2	43	2	68	2	93	4	118	1
19	3	44	4	69	2	94	2	119	4
20	3	45	2	70	4	95	4	120	4
21	4	46	2	71	1	96	2	121	3
22	2	47	2	72	3	97	4		
23	3	48	4	73	3	98	3		
24	4	49	1	74	1	99	2		
25	3	50	3	75	3	100	2		